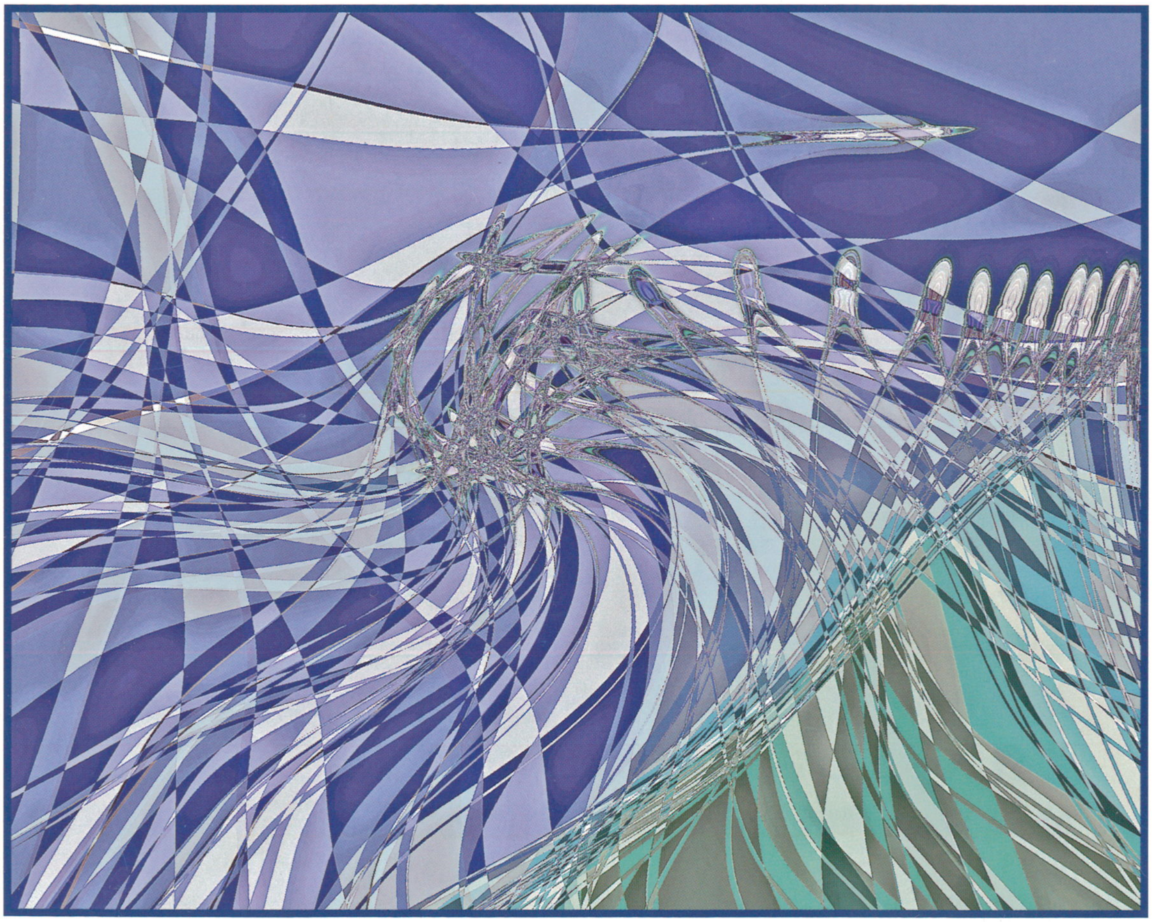
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年8月1日発行　第50巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

8
2012

特集
導来圏をめぐって
数学と物理の新たな世界に迫る



No.590

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 590 August 2012

導来圏をめぐって

数学と物理の新たな世界に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ)11,000円，半年間(本誌のみ)5,500円．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/5 省略

2009年/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求

2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和

2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子

数理科学臨時別冊一覧

11年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11年/11 リーマン予想の数理物理
11年/12 量子多体系の物理
12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂書店(盛岡)
丸善津田沼店
ジュンク堂書店(新潟)
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
ジュンク堂書店(秋田)
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北1店)
九州大学 (理系)

August 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 590

特集／導来圏をめぐって

導来圏の雰囲気

髙橋 篤史

1. はじめに

「導来圏を中心とした特集を組みたい」という内容の手紙を編集部より受け取ったとき，時代の変化を感じて非常に驚いた．

筆者がはじめて導来圏という言葉を聞いたのは1996年，当時修士1年のときであった．正直なところ，「導来圏というすごいものがある」と聞いてもそれがどういうことか全く想像もつかず，「蓬莱軒といううまいラーメン屋があるらしい」程度のこととしか思わなかった．その時代の大学院生にとっては，導来圏は確実に習得しておかなければならない知識ではなかったと思う．

筆者は現在では導来圏やその拡張概念の愛好者であり，またその研究を行っている．なので，一週間ぐらい導来圏と食事と睡眠だけで生活しても全然平気である．けれども，一般の読者にとって特集一冊全体が導来圏というのは大丈夫なのだろうか，興味を持つ読者はいるのだろうか，と心配になった．しかしそれと同時に，本誌の特集として取り上げるくらいに，導来圏が重要で身近な対象となったのだとも思った．このような展開になるとは，16年前には全く想像しなかった．

導来圏に対して，「極めて抽象的で，道具や言葉としてちょっと便利なのかもしれないが，それが本当に数学的実体をもつものなのか？」といった疑問を抱く読者もいるであろう．筆者も最初はそのような疑問を持った一人であった．本特集により，導来圏は道具として強力で見通しがきくものであるだけでなく，それ自身魅力的で豊富な数学的対象であることを実感してほしいと願っている．

2. たとえ話（その1）

導来圏についての詳細は後の解説で与えられることになるので，この巻頭言ではその雰囲気を伝えるために，少したとえ話をしようと思う．

数ベクトルと抽象ベクトル空間の関係を思い出してみよう．まず，しかるべき和とスカラー倍が定義される集合を考えることによりベクトル空間という概念を定義し，その元をベクトルと呼んだのであった．基底という概念を導入することにより，個々のベクトルは数ベクトルとしての表示が与えられた．考えている設定や状況によっては，代数的・幾何学的に意味のある「特別によい基底」が存在し，その基底に関する数ベクトルの成分は重要な代数的・幾何学的意味を持つ．すなわち，重要な意味を持つ数ベクトルは，より普遍的な抽象ベクトル空間と「特別によい基底」の関係で規定されることになる．また，線形写像という概念を導入することにより，ベクトル空間を比較することが可能となる．とくに，同型写像により見かけ上全く異なる2つのベクトル空間が同一視されるという現象にも多く遭遇したであろう．ただし，この同型写像により一方の「特別によい基底」は必

ずしも他方の「特別によい基底」に写されないので，基底変換の記述は必要不可欠な基礎であった．

導来圏をできるだけ専門用語を用いずに表現するならば，「ベクトル」の代わりにより情報の多い「数学的対象とそれらの相互関係」を考えてできる，ベクトル空間を高度に拡張した概念である，とするのが良いであろう．そして，導来圏において基底に相当するのが t-構造ないしアーベル圏である．「アーベル圏の導来圏」としての導来圏は，(標準) 基底付きの数ベクトル空間を考える状況によく似ている．また，導来圏の比較を与える函手は線形写像の高度な拡張であり，圏同値によって見かけ上全く異なる 2 つの導来圏が同一視されることになることも同様である．このとき，2 つの導来圏がそれぞれアーベル圏の導来圏であったとしても，導来圏の圏同値がアーベル圏の圏同値を与えるとは限らないのは，これまでのたとえから容易に想像できるであろう．逆にこの性質にこそが，一見異なる背景を起源に持つ数学的対象を絶妙に関連させる．そして，「導来圏の基底変換」であるところの Fourier–向井変換の代数的・幾何学的記述が重要な問題となるのである．

3. たとえ話（その 2）

圏において重要なのは，上で「相互関係」と書いた部分にある．正確にいうと，圏における射の空間と射の合成のことである．圏が同値であったとき興味深いのは，それらが同型な射の空間と射の合成を持つからである．例えば，幾何学的に重要な不変量で定義されるがその具体的表示を求めるのが極めて困難なものが，別の背景を持つ不変量により代数的に完全に書き下すことが可能となる場合がある．

例えば，$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ という数列を考えてみよう．このような数列を扱う際には母函数 $f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ を考えるのが基本的である．ただし，これはあくまで形式的べき級数として定義されることに注意する．幾何学に起源をもつ量を考察した際に起こる典型的な状況では，数列の最初の数項 a_0, a_1, a_2 などはわかっても一般項を求めることは極めて困難であり，$f(z)$ の収束性や零点および極の位置などの函数としての性質は，この段階ではわからないのである．一方で，$g(z)$ を微分方程式 $\frac{d}{dz}g(z) = g(z)$, $g(0) = 1$ をみたす正則函数として定める．$g(z)$ が指数函数を定めることは明らかであろう．とくに重要なのは，正則函数としての性質は微分方程式から理解できることにある．これが代数的な起源をもつ量を考察した際に起こる典型的状況である．

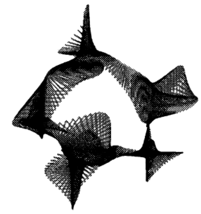
導来圏同値は，上のたとえ話において $f(z) = g(z)$ という等式をもたらす強力な同一視を与える．数列が $g(z)$ の $z = 0$ でのテイラー展開を用いて $a_n = \frac{1}{n!}$ と求まるように，幾何学的に重要な量およびその性質が，代数的背景に基づき完全な形で得られる方程式の解析的性質により決定される，ということが起こる．さらには，特殊函数の重要な恒等式が，射の合成の 2 つの異なる見方として自然に説明されることさえあるのだ．

4. おわりに

結局のところ，余計な心配をしても仕方がないので，編集部の基本構想に沿って，筆者の感性で本特集の内容を提案した．本特集の特色の一つは，導来圏に関連する研究で現在世界的に活躍中の，日本を代表する中堅・若手研究者に執筆を依頼したことである．執筆者全員若いので，力と気合が有り余って少し難解な部分もあると思うが，各分野の背景・目標から最先端の研究に至るまで，その雰囲気を伺い知ることができる素晴らしい解説が揃ったと思う．後で何度か触れられることになるが，1994 年の Kontsevich によるホモロジー的ミラー対称性の提唱で導来圏をめぐる状況は大きく変化し，多くの分野で圏論的手法はより身近になった．執筆者全員がこの変化以降に圏論を勉強した世代に属している．従来とは異なる圏論に対する感覚が見受けられるのではないかと思う．最後までお付き合いいただければ幸いである．

（たかはし・あつし，大阪大学大学院理学研究科）

速習！ 導来圏



上原 北斗

導来圏を正確に理解するためには，圏に関する様々な抽象的な概念を理解する必要があるが，初学者にはややとっつきにくい．しかし実際に導来圏を扱う場合，最初は様々な概念を大まかに理解しておけば十分であることも多い．そこで正確性をやや捨て，いくつかの用語は正確な定義を与えず典型例を示しておくにとどめる．ここではまずは習うより慣れていただき，正確な定義などは文末の文献*1)を参照されたい．

1. 導来圏

圏（category）$\mathcal{C}$ とは，**対象**（object）とよばれるもののクラス $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と，2 個の対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ の間の**射**（morphism）とよばれるものの集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ からなり，射の合成に関していくつかの公理を満たすものである．例えば環*2) R 上の加群のなす圏 $\mathrm{Mod}\,R$ の対象は R 加群全体からなり，R 加群 M, N の間の射は R 準同型である：

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\,R = \{R \text{ 加群}\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,R}(M, N)$$
$$= \{f\colon M \to N \mid f \text{ は } R \text{ 準同型写像}\}.$$

しばしば $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ であることを，$X \in \mathcal{C}$ などと表すことがあるが，ここでもこの用法を用いる．

導来圏は 1960 年代に Grothendieck と彼の学生 Verdier によって導入された概念である．与えられた**アーベル圏**（abelian category）$\mathcal{A}$ の導来圏 $D(\mathcal{A})$ は，$\mathcal{A}$ の複体のなす圏 $\mathrm{Com}\,\mathcal{A}$ を考え，さらにそのホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ から作られるもの

$$\mathrm{Com}\,\mathcal{A} \rightsquigarrow K(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{A})$$

であるが，話を具体的にするために環上の加群から作られる導来圏を見ていこう．もともとアーベル圏は環上の加群のなす圏の満たす性質を公理化したものであるから，環上の加群から作られる導来圏を理解していれば，一般の場合の理解も容易であろう．

2. 加群の複体のなす圏

R を環とする．R 上の加群のなす圏 $\mathrm{Mod}\,R$ は上でも述べたようにアーベル圏になる．**R 加群の複体** $M^\bullet = \{M^n, d^n_{M^\bullet}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は，R 加群 M^n と準同型 $d^n_{M^\bullet}\colon M^n \to M^{n+1}$ の組であって

$$d^n_{M^\bullet} \circ d^{n-1}_{M^\bullet} = 0 \tag{1}$$

を満たすもののことである：

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}_{M^\bullet}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_{M^\bullet}} M^n \xrightarrow{d^n_{M^\bullet}} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}_{M^\bullet}} \cdots.$$

条件 (1) より $\mathrm{Ker}\, d^n_{M^\bullet} \subset \mathrm{Im}\, d^{n-1}_{M^\bullet}$ が成り立つ．$M^\bullet$ の n 番目のコホモロジー

*1) インターネットで入手できるものを中心にあげておいた[1~4,7~9]．

*2) 以下，環の可換性は仮定せず，加群といったら右加群を考える．

$$H^n(M^\bullet) = \operatorname{Ker} d^n_{M^\bullet} / \operatorname{Im} d^{n-1}_{M^\bullet}$$

は複体 $M^\bullet$ の重要な不変量である．**複体** $M^\bullet, N^\bullet$ **の間の射** $f^\bullet = \{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}\colon M^\bullet \to N^\bullet$ は加群の準同型 $f^n\colon M^n \to N^n$ であって

$$f^n \circ d^{n-1}_{M^\bullet} = d^n_{N^\bullet} \circ f^{n-1} \tag{2}$$

が成り立つものである．R **加群の複体のなす圏** $\mathrm{Com}(R)$ を考えるとこれもアーベル圏をなす．

3. 加群のホモトピー圏と導来圏

$\mathrm{Com}(R)$ からホモトピー圏 $K(R)$, 導来圏 $D(R)$ を作っていく：

$$\mathrm{Com}(R) \rightsquigarrow K(R) \rightsquigarrow D(R).$$

以下で述べるように $\mathrm{Com}(R), K(R), D(R)$ の対象はすべて同じで，R 加群の複体である．一方 $\mathrm{Com}(R)$ の写像 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(R)}(-,-)$ をある種の同値関係（ホモトピック）で割って，$K(R)$ の写像 $\mathrm{Hom}_{K(R)}(-,-)$ を作り，さらに $\mathrm{Hom}_{K(R)}(-,-)$ にある種の写像（擬同型）の逆元を形式的に加えることで，導来圏の写像 $\mathrm{Hom}_{D(R)}(-,-)$ を作る．これは，与えられた環 A をイデアル $\mathfrak{a}$ で割り，さらに積閉集合 S で局所化する操作に似ている：

$$A \rightsquigarrow A/\mathfrak{a} \rightsquigarrow S^{-1}(A/\mathfrak{a}).$$

環 $A/\mathfrak{a}$ において，$\mathfrak{a}$ の元が 0 となるように，0 写像とホモトピックな写像は $K(R)$ の写像としては 0 写像であり，S の元が環 $S^{-1}(A/\mathfrak{a})$ において逆元を持つように，$D(R)$ では擬同型は同型写像となる．

複体 $M^\bullet$ から $N^\bullet$ への写像 $f^\bullet, g^\bullet$ が**ホモトピック**であるとは，各 n に対し，ある準同型 $h^n\colon M^n \to N^{n-1}$ が存在し（(3) 参照）

$$f^n - g^n = h^{n+1} \circ d^n_{M^\bullet} + d^{n-1}_{N^\bullet} \circ h^n$$

が成り立つことであった．このとき $f^\bullet \sim g^\bullet$ と表すことにすると，関係 $\sim$ は集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(R)}(M^\bullet, N^\bullet)$ に同値関係を定める：

$$\begin{array}{ccccccc}
M^\bullet & \quad & M^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}_{M^\bullet}} & M^n & \xrightarrow{d^n_{M^\bullet}} & M^{n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle f,g} & & \downarrow & \overset{h^n}{\swarrow} & \downarrow & \overset{h^{n+1}}{\swarrow} & \downarrow \\
N^\bullet & & N^{n-1} & \xrightarrow[d^{n-1}_{N^\bullet}]{} & N^n & \xrightarrow[d^n_{N^\bullet}]{} & N^{n+1}
\end{array} \tag{3}$$

R 加群の**ホモトピー圏**（homotopy category）$K(R)$ の対象は $\mathrm{Com}(R)$ と同じものとし，射の集合を

$$\mathrm{Hom}_{K(R)}(M^\bullet, N^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(R)}(M^\bullet, N^\bullet)/\sim \tag{4}$$

で定める．

次に**導来圏**（derived category）$D(R)$ の定義を与えよう．まず $D(R)$ の対象は，上でも述べたように $\mathrm{Com}(R)$ と同じものとする．一般に $\mathrm{Com}(R)$ の写像 $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ が与えられたとき，条件 (2) より $f^n(\operatorname{Ker} d^n_{M^\bullet}) \subset \operatorname{Ker} d^n_{N^\bullet}$ かつ $f^n(\operatorname{Im} d^{n-1}_{M^\bullet}) \subset \operatorname{Im} d^{n-1}_{N^\bullet}$ が成り立つので，$f^\bullet$ はコホモロジーの間の写像

$$H^n(f^\bullet)\colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$$

を引き起こす．すべての n に対し $H^n(f^\bullet)$ が同型写像となるとき，$f^\bullet$ を**擬同型**（quasi-isomorphism）であるという．$\mathrm{Com}(R)$ の写像で擬同型な写像全体を Qis で表し，さらにそれを $K(R)$ の写像とみなしたものを考えると，それらは "積閉系" と呼ばれる性質を満たす*3)．積閉系をなすこの $K(R)$ の写像のクラスも Qis で表すことにし，それによって $\mathrm{Hom}_{K(R)}(-,-)$ を "局所化" することができる．これが導来圏 $D(R)$ の写像となる*4)：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{D(R)}(M^\bullet, N^\bullet)\\ &= (\mathrm{Qis})^{-1}\,\mathrm{Hom}_{K(R)}(M^\bullet, N^\bullet).\end{aligned} \tag{5}$$

要するに導来圏の定義でやや難しいのは，この写像の定義である．もう少し理解を深めるために次の問題を考えてみよう．

---

*3) Qis は $\mathrm{Com}(R)$ では積閉系をなすとは限らない．

*4) 右辺をきちんと定義していないので，これはいささか正確性に欠けた書き方である．

> **問題**　$f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ を $\mathrm{Com}(R)$ の写像とする．$f^\bullet$ が導来圏 $D(R)$ の写像として 0 となるのはどんな条件が成り立つときか？

答えは次のようである*5)．

解答　ある複体 $L^\bullet$ と擬同型 $s^\bullet\colon L^\bullet \to M^\bullet$ が存在し，$f^\bullet \circ s^\bullet \sim 0$ となるとき．

ちなみに上記の解答は，ある複体 $L^\bullet$ と擬同型 $s^\bullet\colon N^\bullet \to L^\bullet$ が存在し，$s^\bullet \circ f^\bullet \sim 0$ となるとき，とも言い換えられる．ここで

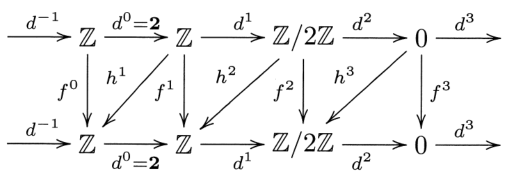
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(R)\text{ の写像として } f^\bullet = 0\\
\Rightarrow\ &K(R)\text{ の写像として } f^\bullet = 0\\
\Rightarrow\ &D(R)\text{ の写像として } f^\bullet = 0\\
\Rightarrow\ &\text{すべての } n \text{ に対して } H^n(f^\bullet) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことは想像がつくだろう．また以下の 2 つの例でみるように，逆はすべて成り立たない．

例 3.1.　$f^\bullet$ が先の解答にある条件を満たしているからといって，$f^\bullet \sim 0$ とはならない例を与えよう．R を整数環として $\mathbb{Z}$ 複体の圏を考えよう．$M^0 = \mathbb{Z}, M^1 = \mathbb{Z}, M^2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とおき，次の複体 $M^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathbb{Z})$ を考える：

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \mathbf{2}\ } \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

ここで $\mathbf{2}$ は 2 倍写像を意味する．さらに $f^\bullet$ を $M^\bullet$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{M^\bullet}$，$s^\bullet\colon M^\bullet \to M^\bullet$ を 0 写像とすると，$M^\bullet$ が完全列からなる複体なので $s^\bullet$ は必然的に擬同型であり，$f^\bullet \circ s^\bullet = 0$ である．一方次の図式にある準同型 $h^n\colon M^n \to M^{n-1}$ を考えると，明らかに h^2 も h^3 も 0 写像である：



特に

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \neq 0 = h^3 \circ d^2 + d^1 \circ h^2$$

であるから $f^\bullet \sim 0$ となり得ない．

*5)　“積閉系” や “局所化” の定義を述べていないので，ここでは正しく証明できない．正確には他の文献を参照のこと．

例 3.2.　次に $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ が先の解答にある条件を満たしていないが，コホモロジーの間の写像 $H^n(f^\bullet)$ はすべて 0 となる例を次のように与える：

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M^0 = \mathbb{Z} & \xrightarrow{d^0_{M^\bullet} = \mathbf{2}} & M^1 = \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle f^{-1}=0} & & \downarrow{\scriptstyle f^0=\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} & & {\scriptstyle f^1=\bar{\mathbf{2}}}\downarrow & & {\scriptstyle f^2=0}\downarrow\\
0 & \longrightarrow & N^0 = \mathbb{Z} & \xrightarrow[d^0_{N^\bullet}]{} & N^1 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

ただし $d^0_{N^\bullet}$ は標準全射とし，$\bar{\mathbf{2}}$ は合成 $d^0_{N^\bullet} \circ \mathbf{2}$ として定める．$H^0(M^\bullet) = H^1(N^\bullet) = 0$ であるから，すべての n に対し，$H^n(f^\bullet) = 0$ である．一方ある複体 $L^\bullet$ と擬同型 $s^\bullet\colon L^\bullet \to M^\bullet$ が存在し，$f^\bullet \circ s^\bullet \sim 0$ となったとする：

$$H^1(s^\bullet)\colon H^1(L^\bullet) \to H^1(M^\bullet) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

は同型写像であるから，$s^1(x)$ が奇数となるような元 $x \in \ker d^1_{L^\bullet}$ が存在する．$2x$ は $H^1(L^\bullet)$ の元として 0 であるから，ある元 $y \in L^0$ が存在し $d^0_{L^\bullet}(y) = 2x$ となる．

仮にホモトピーを与える写像 $h^n\colon L^n \to N^{n-1}$ が存在するとすると，

$$f^0 \circ s^0 = h^1 \circ d^0_{L^\bullet} + d^{-1}_{N^\bullet} \circ h^0$$

が成り立つ．$f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ かつ $d^{-1}_{N^\bullet} = 0$ より

$$s^0 = h^1 \circ d^0_{L^\bullet}$$

が得られる．この式と図式の可換性と y の定義を使って，

$$
\begin{aligned}
2s^1(x) &= s^1 \circ d^0_{L^\bullet}(y) = 2s^0(y)\\
&= 2h^1 \circ d^0_{L^\bullet}(y) = 4h^1(x)
\end{aligned}
$$

が得られるが，これは $s^1(x)$ が奇数であったことに反する．

4. 導来圏において同型な対象は？

$M^\bullet, N^\bullet \in \mathrm{Com}(R)$ が**ホモトピー同値**であるとは $\mathrm{Com}(R)$ の写像 $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ と $g^\bullet\colon N^\bullet \to M^\bullet$ が存在し，

$$f^\bullet \circ g^\bullet \sim \mathrm{id}_{N^\bullet} \text{ かつ } g^\bullet \circ f^\bullet \sim \mathrm{id}_{M^\bullet} \qquad (6)$$

が成り立つことであった．ホモトピー圏 $K(R)$ で

は (4) より，ホモトピックな写像は同一視されるのだから，式 (6) 中の $\sim$ は $=$ になる．つまり $K(R)$ では $M^\bullet \cong N^\bullet$ が成り立つ．またホモトピックな写像同士がコホモロジーに引き起こす写像は一致することがわかるので $H^n(f^\bullet) \circ H^n(g^\bullet) = \mathrm{id}_{H^n(N^\bullet)}$ かつ $H^n(g^\bullet) \circ H^n(f^\bullet) = \mathrm{id}_{H^n(M^\bullet)}$ が成り立つ．つまり $f^\bullet$ と $g^\bullet$ は擬同型となる：

$f^\bullet$ が複体のホモトピー同値を与える

$\Rightarrow f^\bullet$ は擬同型である．

この逆が成り立たない例は次で与えられる．

例 4.1. R 加群の単射 $\varphi\colon M^0 \hookrightarrow N^0$ が与えられたとき，その余核 $\mathrm{Coker}\,\varphi$ を N^1，自然な全射 $N^0 \twoheadrightarrow N^1$ を $d^0_{N^\bullet}$ とおいて，複体 $M^\bullet, N^\bullet$ とその間の写像 $f^\bullet$ を次のように与える：

$$\begin{array}{ccccccccc} M^\bullet\colon & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}=0} & & \downarrow{\scriptstyle f^0=\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle f^1=0} & \\ N^\bullet\colon & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N^0 & \xrightarrow[d^0_{N^\bullet}]{} & N^1 & \longrightarrow \end{array}$$

このとき $H^0(f^\bullet)\colon H^0(M^\bullet) = M^0 \to H^0(N^\bullet)$ は同型写像を与え，また $n \neq 0$ のとき $H^n(M^\bullet) = H^n(N^\bullet) = 0$ であることもわかるので，$H^n(f^\bullet)$ はすべて同型である．つまり $f^\bullet$ は擬同型となる．

一方もし擬同型 $g^\bullet\colon N^\bullet \to M^\bullet$ が存在したとすると，

$$H^0(g^\bullet) = g|_{\mathrm{Ker}\,d^0_{N^\bullet}}\colon \mathrm{Ker}\,d^0_{N^\bullet} = \mathrm{Im}\,f^0 \to M^0$$

が同型となるから，特に $f^0 = \varphi$ が分裂単射であることがわかる．つまり φ が分裂単射でないときには，$M^\bullet$ から $N^\bullet$ に擬同型は存在しない．よってこのとき（$M^\bullet$ から $N^\bullet$ にホモトピー同値を与える写像がないので）$f^\bullet$ はホモトピー同値を与える写像ではないこともわかる．

導来圏 $D(R)$ の中では擬同型写像 $f^\bullet$ は (5) より逆写像を持つ，つまり同型写像であるから

$$M^\bullet \not\cong N^\bullet \text{ in } K(R), \quad M^\bullet \cong N^\bullet \text{ in } D(R)$$

が成り立つ．

このように擬同型写像で結べるような複体を同型にする操作をしたものが導来圏である．この操作の有用性を見るために与えられた R 加群 M, N の $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ の定義を思い出そう．

まず M の射影解消

$$\cdots \xrightarrow{d^{-3}} P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとる．この最後の M を 0 に置き換えた複体 $P^\bullet = \{P^n\}$ は M と擬同型で結ばれる．$P^\bullet$ に M をテンソルし，新たな複体 $P^\bullet \otimes_R N$

$$\cdots \xrightarrow{d^{-n-1}\otimes_R \mathrm{id}_N} P^{-n} \otimes_R N \xrightarrow{d^{-n}\otimes_R \mathrm{id}_N} \cdots$$
$$\xrightarrow{d^{-2}\otimes_R \mathrm{id}_N} P^{-1} \otimes_R N \xrightarrow{d^{-1}\otimes_R \mathrm{id}_N} P^0 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

を考え，その $-n$ 番目のコホモロジー $H^{-n}(P^\bullet \otimes_R N)$ が $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ であった．これは一見，射影解消 $P^\bullet$ のとり方によっているように見えるが，もし他の射影解消 $Q^\bullet$ をとると，$P^\bullet$ と $Q^\bullet$ は互いにホモトピー同値になり，さらに $P^\bullet \otimes_R N$ と $Q^\bullet \otimes_R N$ も互いにホモトピー同値となることがわかるので，結局そのコホモロジーで定義した $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ は射影解消のとり方によらないことがわかる．

一方 $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ を計算する上で，射影加群の代わりに平坦加群 F^n を用いた平坦解消 $F^\bullet$ をとって計算もできる．このとき $P^\bullet$ と $F^\bullet$ は，もはやホモトピー同値であるとは限らないが，擬同型 $P^\bullet \otimes_R N \to F^\bullet \otimes_R N$ は存在するので，やはりそのコホモロジーは変わらない．

このようにアーベル圏 $\mathcal{A}$ を $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ まで広げることにより，Tor や Ext といった重要な不変量が計算できる．ところが $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ の射は膨大なため，ホモトピックな射を同一視したい．さらに擬同型で結ばれる対象を同一視したいので，導来圏 $D(\mathcal{A})$ を導入するのである．

5. 三角圏

アーベル圏 $\mathcal{A}$ から作った導来圏 $D(\mathcal{A})$ の性質を抽出し，公理化したものが**三角圏**（triangulated category）である．三角圏は加法圏であって，$D(\mathcal{A})$ の元，つまり複体の次数をずらすことに対応する自己同型関手（[1] などと書かれ，**シフト関手** (shift functor) と呼ばれる）と，アーベル圏の

短完全列に相当するもの（**特三角**（distinguished triangle）もしくは**完全三角**（exact triangle）と呼ばれる）があり，その意味でアーベル圏を一般化したものと見ることができる*6)．また $K(\mathcal{A})$ も三角圏である．2 つの導来圏の間の関手を考えるときは，三角圏の間の関手，つまり特三角を特三角に写し，さらに [1] と可換な加法関手を考えるのが普通である．

アーベル圏から上記の方法で作る導来圏が導来圏の起源であるが，最近はアーベル圏以外からでも似たような操作でできる三角圏のことを導来圏と呼ぶことも多い．

さらにアーベル圏 $\mathcal{A}$ の導来圏 $D(\mathcal{A})$ の部分圏として，上に有界な複体（つまり十分大きい n に対し $H^n(P^\bullet)=0$）のみを考えたり，下に有界な複体や，上にも下に有界な複体のみを考えるのも重要な場合がある．それぞれ $D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$ などと表記し，これらはどれも $D(\mathcal{A})$ の部分三角圏である．

6. 加群の導来圏の森田理論

2 つの環上の加群のなすアーベル圏が同値になる条件と，その同値を与える関手を記述したのが森田理論であった．以下では加群の導来圏，代数多様体の連接層の導来圏に関して，森田理論に対応する Rickard の定理，Orlov の定理を紹介しよう．

A を環とする．$\mathrm{proj}\,A$ で有限生成射影加群のなす $\mathrm{Mod}\,A$ の部分圏を表し，有界で各項が $\mathrm{proj}\,A$ の元となっているような複体のなすホモトピー圏を $K^b(\mathrm{proj}\,A)$ で表す．

A 上の**傾斜複体**（tilting complex）とは次を満たすもののことである．

(i) $T \in K^b(\mathrm{proj}\,A)$.

(ii) n が 0 でないとき $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Mod}\,A)}(T, T[n]) = 0$ が成り立つ．ただし $[n] = \overbrace{[1]\circ\cdots\circ[1]}^{n}$ とする．

*6) アーベル圏は三角圏になる，という意味ではない．

(iii) $D(\mathrm{Mod}\,A)$ の部分三角圏のうち，T を含み，直和因子を取る操作で閉じているものは $D(\mathrm{Mod}\,A)$ 全体になる．

定理 6.1 (Rickard[6])．A, B を環とする．このとき次は同値である．

(i) $D(\mathrm{Mod}\,A)$ と $D(\mathrm{Mod}\,B)$ は三角圏として同値．

(ii) B 上の傾斜複体 T が存在し，環の同型 $\mathrm{End}_{D(\mathrm{Mod}\,B)}(T) \cong A$ が存在する．

Rickard の定理によると，2 つの環の加群の導来圏の同値を与えることと傾斜複体を与えることは同値であることを示唆しており，加群の圏に関する森田理論を導来圏のレベルに拡張した非常に美しく，また強力な定理である．

7. 連接層の導来圏とフーリエ・向井変換

代数多様体 X 上の連接層のなすアーベル圏の導来圏を単に $D(X)$ で表そう．$D^b(X), D^-(X)$ なども同様に定義する．

定理 7.1 (Orlov[5])．X, Y を $\mathbb{C}$ 上定義された滑らかな射影代数多様体とし，関手 $\Phi\colon D^b(X) \to D^b(Y)$ が三角圏の同値を与えているとする．このとき $D^b(X \times Y)$ の対象 P が存在し，関手の同型

$$\Phi(-) \cong \mathbb{R}p_*(q^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} P)$$

が存在する．ここで p, q は次の射影

$$X \xleftarrow{\ q\ } X \times Y \xrightarrow{\ p\ } Y$$

であり，$\mathbb{R}p_*(-), (-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} P$ はそれぞれ導来関手である*7)．ここに現れる対象 P の取り方は同型を除いて一意的である．

*7) アーベル圏の間に左完全（右完全）な加法関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し，適当な条件の下，**右（左）導来関手**（right derived functor, left derived functor）とよばれる関手

$$\mathbb{R}F\colon D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B}) \quad (\mathbb{L}F\colon D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B}))$$

が定義できる．また良い条件の元では，これらは $D^b(\mathcal{A})$ や $D^-(\mathcal{A})$ からの関手となる．

Y をアーベル多様体，X をその双対アーベル多様体，P をポアンカレ束としたとき，定理に現れる関手 $\mathbb{R}p_*(q^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} P)$ は導来圏の同値を与えることが，1980 年頃，向井茂氏によって見出された．こうした経緯から，この形の関手を**フーリエ・向井変換**（Fourier–Mukai transform），P をその**積分核**とよぶ．代数多様体の導来圏の同値を与える関手の形を完全に記述するこの定理はまさに驚くべき結果で，また代数多様体の導来圏の研究の様々な場面で登場する非常に重要な結果でもある．

定理 7.1 にあるような 2 つの代数多様体を**フーリエ・向井パートナー**（Fourier–Mukai partner）とよぶ．様々な多様体に対し，そのフーリエ・向井パートナーを幾何的に記述する試みがなされていて，これも大変興味深い問題である．

8. 連接層の導来圏と加群の導来圏

最後に連接層の導来圏と加群の導来圏を結びつける傾斜生成元を紹介し，筆をおこう．X を射影的な代数多様体とし，$\mathcal{E}$ を X 上のベクトル束とする．$\mathcal{E}$ が**傾斜生成元**（tilting generator）であるとは次の 2 つの条件が成り立つことである．

(i) $n \neq 0$ に対して $\mathrm{Ext}^n_X(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ が成り立つ．

(ii) $\mathcal{F} \in D^-(X)$ に対し，$\mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[n]) = 0$ が成り立つとき，$\mathcal{F} \cong 0$ となる．

傾斜生成元 $\mathcal{E}$ に対し，その自己準同型環 $\mathrm{End}_X(\mathcal{E})$ を A で表すこととし，次の導来関手を考えよう：

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -)\colon D^-(X) \to D^-(\mathrm{mod}\,A),$$

$$- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathcal{E}\colon D^-(\mathrm{mod}\,A) \to D^-(X).$$

ここで $\mathrm{mod}\,A$ は有限生成な右 A 加群のなす圏を表す．

定理 8.1. $\mathcal{E}$ を傾斜生成元とすると $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -)$ と $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathcal{E}$ は $D^-(X)$ と $D^-(\mathrm{mod}\, A)$ の間に三角圏の同値を与える．さらにこれら関手を制限することにより，$D^b(X)$ と $D^b(\mathrm{mod}\, A)$ の間にも三角圏の同値が得られる*8)．

しばしば代数多様体は傾斜生成元を持ち，$D^b(X)$ が $D^b(\mathrm{mod}\, A)$ と三角圏として同値になるため，$D^b(X)$ の研究に有限次元代数 A 上の表現論が応用される．このように導来圏の研究は，様々な分野が交錯するのが，その最大の旨みであろう．

参考文献

1) A. Căldăraru, Derived categories of sheaves: a skimming, Snowbird Lectures in Algebraic Geometry, *Contemp. Math.* no.**388** (2005), 43–75.
2) 梶浦宏成，『数物系のための圏論〜導来圏，三角圏，A_∞ 圏を中心に〜』，臨時別冊・数理科学 2010 年 7 月．
3) B. Keller, Derived categories and their uses, Chapter of the *Handbook of algebra*, Vol.**1**, Elsevier (1996).
4) H. Krause, Derived categories, resolutions, and Brown representability, arXiv:math.KT/0511047.
5) D. Orlov, Equivalences of derived categories and K3 surfaces, *J. Math. Sci.*, (New York), **84** (1997), 5, 1361–1381.
6) J. Rickard, Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc.* **43** (1991), 37–48.
7) R. Rouquier, Catégories dérivées et géométrie birationelle, *Séminaire Bourbaki*, Astérisque **307** (2006), 283–307.
8) S. Schwede, Morita theory in abelian, derived and stable model categories, in *Structured Ring Spectra*, 33–86, London Math. Soc. Lecture Notes **315** (2004).
9) R.P. Thomas, Derived categories for the working mathematician, In Winter School on Mirror Symmetry, Vol.**23** of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, (2001), 349–361.
10) Y. Toda, H. Uehara, Tilting generators via ample line bundles, *Adv. Math.* **233** (2010), 1–29.

（うえはら・ほくと，首都大学東京大学院理工学研究科）

*8) この定理は様々な変種があるが，この形の主張は文献 10, Lemma 3.3) から導かれる．

可換環論と導来圏

高橋　亮

1. はじめに

私が導来圏の勉強を始めたのは修士2年になったばかりの頃だった．きっかけは文献3)でGorenstein次元という加群の不変量に出会ったことである．可換Noether環 R 上の有限生成加群 M の **Gorenstein次元**が有限であるとは，

(1) 有限生成 R 加群の完全列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$ が存在，

(2) 各 $0 \le i \le n$ について

- R 加群の自然な準同型写像 $G_i \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(G_i, R), R)$ が同型，
- 任意の $j > 0$ に対し $\mathrm{Ext}_R^j(G_i, R) = 0$，
- 任意の $j > 0$ に対し $\mathrm{Ext}_R^j(\mathrm{Hom}_R(G_i, R), R) = 0$

が成り立つことで定義される．この定義は，言葉は平易だがややこしく，何を意味しているのかよくわからない．しかし，導来圏の言葉を用いると次のようにすっきりした形で述べることができる．

(1) $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, R)$ が有界，

(2) R の導来圏における自然な射 $M \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ が同型．

ただこれだけである．しかも，このように書くと，Gorenstein次元が有限な加群というのは導来圏において反射的になるような加群，というニュアンスも伝わってくる．さらに，Gorenstein次元が複体にも自然に拡張できることがわかる．

ページ数の関係上Gorenstein次元についてはこれ以上述べることができないが，可換環論において導来圏はこのように見通しのよいアプローチを与える「道具」として主に用いられてきた．実際，可換環上の加群や複体に関する諸結果が，導来圏の手法を用いると直接証明よりもずっとシンプルに示せることが多い．本稿では，まず

- Auslander–Buchsbaumの公式，
- Foxbyの定理，
- 双対化複体の存在性と一意性，
- 局所双対定理

という可換環論におけるクラシカルな結果が，導来圏の手法を用いるとどれだけ見やすく示されるかということを説明する．その後，可換環上の導来圏自体を考察する研究の一例として，導来圏のthick部分圏の分類および導来圏の次元の研究について簡単に紹介する．

2. 準備

本稿は『可換環論と導来圏』というタイトルなので，環としては単位元をもつ可換なNoether環[*1)]を対象とする．そして，簡単のため，そのようなものの中でも局所環のみを考える．

R を環とし，その極大イデアルと剰余体をそれ

*1)　可換環論では，“環”というと通常このような環を意味する．

ぞれ $\mathfrak{m}, k$ で表す．R 複体は R 加群の余鎖複体，つまり R 加群の準同型写像の列

$$X = (\cdots \xrightarrow{\partial^{i-1}} X^i \xrightarrow{\partial^i} X^{i+1} \xrightarrow{\partial^{i+1}} \cdots)$$

で任意の i に対して $\partial^{i+1}\partial^i = 0$ をみたすものを意味する．R 複体の鎖写像 $f : X \to Y$ は各ホモロジー上に R 加群の準同型写像 $\mathrm{H}^i(f) : \mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^i(Y)$ を誘導するが，これらがみな同型になるとき，f は**擬同型**であるという．

R 加群とその間の準同型写像全体のなす圏 $\mathsf{Mod}\, R$ は Abel 圏になるが，それの**導来圏**を $\mathsf{D}(R)$ で表す．これは R 複体全体を対象とし，射は R 複体の鎖写像から作られ，擬同型が同型になるような圏である．各 R 加群 M を，M を次数 0 に据えた R 複体

$$(\cdots \to 0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots)$$

と同一視することにより，$\mathsf{Mod}\, R$ は $\mathsf{D}(R)$ の充満部分圏になる．左有界な R 複体，つまり十分低次のホモロジーが消えている R 複体を集めて作った $\mathsf{D}(R)$ の充満部分圏を $\mathsf{D}^+(R)$ で，右有界な R 複体のなす充満部分圏を $\mathsf{D}^-(R)$ で表し，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(R) = \mathsf{D}^+(R) \cap \mathsf{D}^-(R)$ とおく．また，それらの中でホモロジーが R 加群として有限生成になるような R 複体全体のなす充満部分圏を $\mathsf{D}_{\mathrm{f}}^+(R), \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(R), \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(R)$ で表す．これらの圏はすべて三角圏の構造をもつ．**三角圏**とは，**シフト関手**と呼ばれる自己同値 Σ および**完全三角**と呼ばれる射の列

$$X \to Y \to Z \to \Sigma X$$

たちを伴う加法圏である．完全三角は，イメージ的には短完全列のようなものである．実際，R 複体の短完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

は上の形の完全三角を誘導し（ΣX は X を左に 1 だけシフトしてできた複体 $X[1]$ で定義される），逆に上述の三角圏たちの各完全三角はある R 複体の短完全列から誘導されるものと同型である．

導来圏 $\mathsf{D}(R)$ の各対象 X に対し

$$\sup X = \sup\{\, i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i(X) \neq 0 \,\},$$
$$\inf X = \inf\{\, i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i(X) \neq 0 \,\}$$

とおく．X が R 加群の場合は $\sup X = \inf X = 0$ であり，逆に $\sup X = \inf X$ なる X は R 加群をシフトしたものと $\mathsf{D}(R)$ 内で同型である．

さて，可換環論では導来圏は基本的に道具として用いられてきたと前節で述べたが，これはすなわち，**導来関手** $\mathbf{R}\mathrm{Hom}, \otimes^{\mathbf{L}}, \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}$（ただし $\mathfrak{a}$ は R のイデアル）たちが導来圏において作る同型を大いに活用する，ということである．ここで，これら 3 つの導来関手の定義について簡単に述べておこう．$X, Y \in \mathsf{D}(R)$ とする．$X \in \mathsf{D}^-(R)$ ならば，加群のときと同様に X の**射影分解** P を作ることができる[*2]．このとき，$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y), X \otimes_R^{\mathbf{L}} Y$ をそれぞれ $\mathrm{Hom}_R(P, Y), P \otimes_R Y$（の全複体）で定義する．双対的に，$Y \in \mathsf{D}^+(R)$ ならば，Y の**入射分解** I を作ることができ[*3]，$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y), \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(Y)$ をそれぞれ $\mathrm{Hom}_R(X, I), \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ で定義する[*4]．有限生成 R 加群 M, N と整数 n に対し

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) \cong \mathrm{H}^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, N)),$$
$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{H}^{-n}(M \otimes_R^{\mathbf{L}} N),$$
$$\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^n(M) \cong \mathrm{H}^n(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$$

が成り立つことに注意する（なお，$\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^n(M)$ は $\mathfrak{a}$ に関する M の n 次**局所コホモロジー**加群である）．

3. 基本同型と級数等式

$X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(R)$ と $Y \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^+(R)$ をとる．X の**射影次元**および Y の**入射次元**を

---

*2） 各成分が射影加群であるような右有界 R 複体 P で擬同型 $P \to X$ を伴うもの．$X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(R)$ ならば，各成分が有限生成加群になるように取ることができる．

*3） 各成分が入射加群であるような左有界 R 複体 I で擬同型 $Y \to I$ を伴うもの．

*4） $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ の定義の仕方が 2 通り出てきたが，もちろん，$X \in \mathsf{D}^-(R)$ かつ $Y \in \mathsf{D}^+(R)$ のときには $\mathsf{D}(R)$ 内で $\mathrm{Hom}_R(P, Y) \cong \mathrm{Hom}_R(P, I) \cong \mathrm{Hom}_R(X, I)$ が成り立っている．R 加群 M に対し $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ は $\mathfrak{a}$ のべきで零化される M の元のなす集合を表し，M の R 部分加群になる．これは M の **$\mathfrak{a}$ ねじれ部分加群**と呼ばれる．

$$\mathrm{pd}_R X = -\inf(X \otimes_R^{\mathbf{L}} k),$$
$$\mathrm{id}_R Y = \sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, Y)$$

で定義する（これらは $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ に値を取る）．また，X の **Poincaré 級数**および Y の **Bass 級数**を $\mathbb{Z}$ 上の形式的 Laurent 級数

$$\mathbf{P}_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n(X) t^n,$$
$$\mathbf{I}^Y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu^n(Y) t^n$$

で定義する．ここで，

$$\beta_n(X) = \dim_k \mathrm{H}^{-n}(X \otimes_R^{\mathbf{L}} k),$$
$$\mu^n(Y) = \dim_k \mathrm{H}^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, Y))$$

は，X の n 次 **Betti 数**，Y の n 次 **Bass 数**と呼ばれる．

通常の加群に対する $\mathrm{Hom}, \otimes, \Gamma_{\mathfrak{a}}$ と同様に，$\mathbf{R}\mathrm{Hom}, \otimes^{\mathbf{L}}, \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}$ は次の同型（本稿ではこれらを基本同型と呼ぶ）をみたす．S を R 代数とする．

(1) $X \in \mathsf{D}^+(R)$ に対し
$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(X) \cong \varinjlim_i \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^i, X)$.

(2) $X \in \mathsf{D}(R)$ に対し
$X \otimes_R^{\mathbf{L}} R \cong X \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(R, X)$.

(3) $X \in \mathsf{D}^-(R), Y \in \mathsf{D}(R)$ に対し
$X \otimes_R^{\mathbf{L}} Y \cong Y \otimes_R^{\mathbf{L}} X$.

(4) $X \in \mathsf{D}^-(S), Y \in \mathsf{D}(S), Z \in \mathsf{D}^-(R)$ に対し
$(X \otimes_S^{\mathbf{L}} Y) \otimes_R^{\mathbf{L}} Z \cong X \otimes_S^{\mathbf{L}} (Y \otimes_R^{\mathbf{L}} Z)$.

(5) $X \in \mathsf{D}^-(S), Y \in \mathsf{D}(S), Z \in \mathsf{D}^+(R)$ に対し
$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X \otimes_S^{\mathbf{L}} Y, Z)$
$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(Y, Z))$.

(6) $X \in \mathsf{D}^-(S), Y \in \mathsf{D}^-(R), Z \in \mathsf{D}(S)$ に対し
$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(Y, Z))$
$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(Y, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, Z))$.

(7) $X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(S), Y \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S), Z \in \mathsf{D}^-(R)$ とする．$\mathrm{pd}_S X < \infty$ または $\mathrm{pd}_R Z < \infty$ ならば
$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, Y) \otimes_R^{\mathbf{L}} Z$
$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, Y \otimes_R^{\mathbf{L}} Z)$.

(8) $X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(S), Y \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S), Z \in \mathsf{D}^+(R)$ とする．$\mathrm{pd}_S X < \infty$ または $\mathrm{id}_R Z < \infty$ ならば
$X \otimes_S^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(Y, Z)$
$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(X, Y), Z)$.

(9) $X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(R), Y \in \mathsf{D}^+(R)$ に対し
$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y))$
$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(Y))$.

これらの基本同型を用いて Poincaré 級数と Bass 級数に関する次の等式（本稿ではこれらを級数等式と呼ぶ）が得られる．

(1) $X, Y \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(R)$ に対して
$\mathbf{P}_{X \otimes_R^{\mathbf{L}} Y}(t) = \mathbf{P}_X(t)\, \mathbf{P}_Y(t)$.

(2) $X \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^-(R), Y \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^+(R)$ に対して
$\mathbf{I}^{\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X,Y)}(t) = \mathbf{P}_X(t)\, \mathbf{I}^Y(t)$.

(3) $X, Y \in \mathsf{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(R)$ とする．$\mathrm{pd}_R X < \infty$ ならば
$\mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X,Y)}(t) = \mathbf{P}_X(t^{-1})\, \mathbf{P}_Y(t)$.

4. Auslander–Buchsbaum の公式と Foxby の定理

有限生成 R 加群 M に対し，

$$\mathrm{depth}_R M = \inf\{\, i \geq 0 \mid \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0 \,\}$$

を M の**深度**という．これは M 上の正則列の長さの上限と一致し，可換環論において極めて基本的かつ重要な不変量である．

さて，M を射影次元が有限な有限生成 R 加群としたとき，次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{pd}_R M + \mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth}_R R. \qquad \text{(a)}$$

これは **Auslander–Buchsbaum の公式**[4] と呼ばれ，可換環論の基礎知識の一つである．この等式の直接の証明は通常 $\mathrm{depth}_R R$ に関する帰納法で行われる．難しくはないが，やや面倒である．

ここで，この等式の導来圏を用いた別証明を与えよう．まず，M の深度を $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ の言葉で述べると，$\mathrm{depth}_R M = \inf \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, M)$ となる．基本同型により，

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, M) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R \otimes_R^{\mathbf{L}} M) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) \otimes_R^{\mathbf{L}} M \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) \otimes_k (k \otimes_R^{\mathbf{L}} M)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}&\inf \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,M)\\&=\inf \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,R)+\inf(k\otimes^{\mathbf{L}}_R M)\end{aligned}$$

となる．よって，$\operatorname{depth}_R M=\operatorname{depth}_R R-\operatorname{pd}_R M$ となり等式 (a) が従う．

一方，Foxby[9]による著名な定理で，次の二条件が同値であるというものがある．

- R は Gorenstein 環*5)である．
- 射影次元と入射次元が有限な有限生成非零 R 加群が存在する．

上の証明はこれの証明も与える．実際，M を射影次元と入射次元が有限な有限生成 R 加群とすると

$$\begin{aligned}&\sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,M)\\&=\sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,R)+\sup(k\otimes^{\mathbf{L}}_R M)\\&=\sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,R)\end{aligned}$$

となる．今 $\sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,M)=\operatorname{id}_R M<\infty$ なので $\operatorname{id}_R R=\sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,R)<\infty$ となり，R は Gorenstein 環である．

5. 双対化複体

複体 $D\in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ は，入射次元が有限で $\mathsf{D}(R)$ 内の自然な射 $R\to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(D,D)$ が同型のとき，**双対化複体**と呼ばれる．定義より明らかに，R が Gorenstein 環であることと R が双対化複体であることは同値である．D が双対化複体のとき，任意の $X\in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ に対し $\mathsf{D}(R)$ 内の自然な射

$$X\to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X,D),D)$$

は同型である．“双対化” という名は双対化複体のもつこの性質に由来する．

双対化複体の存在性について考えよう．S を Gorenstein 環とし，R を S の準同型像*6)とする．このとき，$D=\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,S)$ は R 上の双対化複体になる．実際，基本同型により

*5) $\operatorname{id}_R R<\infty$ をみたす環 R を **Gorenstein 環**という．

*6) S のあるイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $R\cong S/\mathfrak{a}$ となっているということ．

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(-,D)$$
$$= \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(-,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,S))$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(- \otimes^{\mathbf{L}}_R R, S) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(-,S)$$

となるので，

$$\mathrm{id}_R\, D = \sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k,D)$$
$$= \sup \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(k,S) = \mathrm{id}_S\, S < \infty,$$

および

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(D,D) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(D,S)$$
$$= \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,S),S) \cong R$$

が従う*7)．

一方，双対化複体は，存在すればシフトの差を除いて一意的に決まる．つまり，D, D' が双対化複体のとき，ある整数 n が存在して $D' \cong D[n]$ となる[11]．この事実は，級数等式を用いると以下のようにすっきりと示すことができる*8)．$D' \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(D',D),D)$ なので級数等式から $\mathbf{I}^{D'}(t) = \mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D',D)}(t)\,\mathbf{I}^D(t)$ が出る．対称性より $\mathbf{I}^D(t) = \mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D,D')}(t)\,\mathbf{I}^{D'}(t)$ も得られ，

$$\mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D',D)}(t)\,\mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D,D')}(t) = 1$$

が従う．よって，ある整数 n が存在して

$$\mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D',D)}(t) = t^n,$$
$$\mathbf{P}_{\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D,D')}(t) = t^{-n}$$

となる．こうして $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D',D) \cong R[-n]$ であることがわかり，

$$D' \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}(D',D),D)$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(R[-n],D) \cong D[n]$$

が得られる．

6. 局所双対定理

R を Gorenstein 環 S の準同型像であるような Cohen–Macaulay 環とし，$\dim R = d$, $\dim S = e$ とおく*9)．このとき，前節でみたように $D = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,S)[e-d]$ は R 上の双対化複体になるが，$\sup D = \inf D = 0$ なので D は $\mathsf{D}(R)$ の中で加群と同型になる．これは**正準加群**と呼ばれ，

$$\mathrm{Ext}^i_R(k,\omega) \cong \begin{cases} k & (i=d), \\ 0 & (i \neq d) \end{cases}$$

をみたす有限生成 R 加群 ω に他ならない．双対化複体の一意性により，正準加群は同型の差を除いて一意的に決まる．

局所双対定理とは，有限生成 R 加群 M に対し

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{Ext}^{d-i}_R(M,\omega)^\vee \quad (i \in \mathbb{Z}) \qquad \text{(b)}$$

なる同型が存在するというもので，Grothendieck によって示された[11]．ここで，$(-)^\vee$ は **Matlis 双対** $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{E}_R(k))$ を表す（$\mathrm{E}_R(k)$ は k の入射包絡）．

導来圏の手法を用いてこの定理を簡単に示してみよう．S の極小入射分解から $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{n}}(S) \cong \mathrm{E}_S(k)[-e]$ が従う（$\mathfrak{n}$ は S の極大イデアルを表す）．基本同型を使って

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(D) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{n}}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,S))[e-d]$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{n}}(S))[e-d]$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R,\mathrm{E}_S(k))[-d] \cong \mathrm{E}_R(k)[-d].$$

再び基本同型を使うと

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$$
$$\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M,D),D))$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M,D),\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(D))$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M,D),\mathrm{E}_R(k)[-d])$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M,D)^\vee[-d]$$
$$\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M,\omega)^\vee[-d].$$

i 次のホモロジーをとると同型 (b) が得られる．

---

*7) これで Gorenstein 環の準同型像は双対化複体をもつことがわかったが，逆に双対化複体をもつ環は Gorenstein 環の準同型像になる．これは 1970 年代に Sharp が提示した予想だったが，今世紀に入って川崎[14]によって示された．

*8) この方法は文献 2) による．実際 2) ではより一般に**半双対化複体**の一意性を示している．

*9) R の素イデアルの鎖の長さの上限を R の **(Krull) 次元**といい，$\dim R$ で表す．$\mathrm{depth}_R R = \dim R$ をみたす環 R を **Cohen–Macaulay 環**という．

7. 特異圏と Cohen–Macaulay 安定圏

有限生成射影加群の有界複体を**完全複体**という．完全複体全体のなす $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ の充満部分圏を $\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ で表す．これは $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ の三角部分圏になるので，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ の $\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ による **Verdier 商**

$$\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R) = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)/\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$$

を構成することができる．この圏は三角圏構造をもち，R の**特異圏**と呼ばれている．1980 年代に Buchweitz により導入された．Orlov による一連の研究で，この圏は Kontsevich が提唱した**ホモロジー的ミラー対称性予想**と密接な関係にあることが見出されている．

R を Cohen–Macaulay 環とする．$\mathsf{CM}(R)$ で R 上の Cohen–Macaulay 加群*10) とその間の準同型写像全体のなす圏を表す．この圏を射影加群全体のなす充満部分圏 $\mathsf{proj}\, R$ で割る（射影加群を経由する写像をゼロとみなす）ことでできる圏

$$\underline{\mathsf{CM}}(R) = \mathsf{CM}(R)/\,\mathsf{proj}\, R$$

を R の **Cohen–Macaulay 安定圏**という．これは通常はただの加法圏でしかないが，R が Gorenstein 環のときは三角圏になり，R が孤立特異点のときは **Auslander–Reiten 双対**と呼ばれる双対性をもつ．また，R が Gorenstein 環かつ孤立特異点ならば **Calabi–Yau 性**と呼ばれる性質をみたす．この性質は近年盛んに研究がなされている**クラスター理論**において重要な役割を果たしている．

さて，Gorenstein 環上では 2 つの三角圏 $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ および $\underline{\mathsf{CM}}(R)$ が得られたが，実はこの両者は三角圏として同等である．すなわち，R が Gorenstein 環のとき，三角圏同値

$$\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R) \cong \underline{\mathsf{CM}}(R)$$

が存在する*11)．

*10) $\mathrm{depth}_R M = \dim R$ をみたす有限生成 R 加群 M を（極大）**Cohen–Macaulay 加群**という．

*11) この結果は Buchweitz によって示された．一般には特異圏 $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ の各対象は複体であり射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)}(X,Y)$ は R 加群として無限生成になるが，R が Gorenstein のときはこの圏同値により，各対象は Cohen–Macaulay 加群で表せて射の集合は有限生成 R 加群になることがわかる．

8. 導来圏の thick 部分圏と次元

三角圏の **thick 部分圏***12) の分類研究は，安定ホモトピー論[8,13]の深い研究において始まり，環論[12,15]，モジュラー表現論[5,6]，代数幾何学[10,19]といった多くの分野において盛んに行われてきた．可換環論では Hopkins–Neeman の分類定理が著名である．すなわち，

- $\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ の thick 部分圏，
- $\mathrm{Spec}\, R$ の閉部分集合の和集合

の間に一対一対応が存在する．実際，複体の Supp（台）を取ることがこの一対一対応を誘導する．これは，$\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ の任意の thick 部分圏というわけのわからないものが，$\mathrm{Spec}\, R$ のある閉部分集合の和集合 W という構造のよくわかるものを用いて

$$\{\, X \in \mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R) \mid \mathrm{Supp}\, X \subseteq W \,\}$$

と表されることを意味している．またこれは特に，$X, Y \in \mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ が $\mathrm{Supp}\, X \subseteq \mathrm{Supp}\, Y$ をみたすならば，X は Y から直和因子と完全三角を取る操作を有限回繰り返すことで得られる（導来圏の対象が付随する素イデアルの情報から復元できる）ということを言っている．

Hopkins–Neeman の定理により $\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ の thick 部分圏は分類されたので，$\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ の $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ における "補空間" である $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ の thick 部分圏も分類できないかと考えることは自然な発想である．R が超曲面のときはそれが可能で

- R を含む $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ の thick 部分圏，
- $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ の thick 部分圏，
- $\mathrm{Sing}\, R$ の閉部分集合の和集合*13)

の間に一対一対応があることがわかっている[18]．

ここまで導来圏の構造をその部分圏から理解しようとする研究について述べたが，より直接的に導来圏の内部構造を調べる手段として，三角圏の**次元**という概念がある．これは Rouquier[17] によって

*12) 直和因子で閉じた充満三角部分圏のこと．Verdier が **épaisse 部分圏**という名で導入し，三角圏の Verdier 局所化・Verdier 商の概念において基本となる部分圏である．

*13) $\mathrm{Sing}\, R$ は R の**特異軌跡**を表す．すなわち，局所環 $R_{\mathfrak{p}}$ が正則にならない素イデアル $\mathfrak{p}$ 全体のなす集合のこと．

explicit に導入された[*14]が，implicit には Bondal と Van den Bergh[7]によって最初に調べられた．彼らは滑らかで固有な代数多様体の連接層の有界導来圏が有限次元になることを示し，それを用いて表現可能定理を導いた．また，Rouquier[16]はベクトル空間の外積代数の特異圏の次元を計算することで，初めて表現次元が 3 を超える環の例を構成した．一方，R が完全体上の完備局所環[1]または本質的有限型の環[17]のとき $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(R)$ は（従って $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ も）有限次元になることがわかっている．次元の上界や下界に関する結果が多々報告され，様々な角度からの研究が行われている．

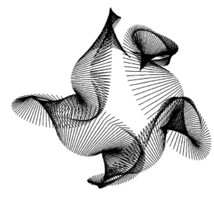
参考文献

1) T. Aihara; R. Takahashi, `arXiv:1106.0205`.
2) T. Araya; R. Takahashi; Y. Yoshino, *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005).
3) M. Auslander; M. Bridger, *Mem. AMS* **94** (1969).
4) M. Auslander; D.A. Buchsbaum, *Trans. AMS* **85** (1957).
5) D.J. Benson; J.F. Carlson; J. Rickard, *Fund. Math.* **153** (1997).
6) ——; S.B. Iyengar; H. Krause, *Ann. of Math.* **174** (2011).
7) A. Bondal; M. Van den Bergh, *Mosc. Math. J.* **3** (2003).
8) E.S. Devinatz; M.J. Hopkins; J.H. Smith, *Ann. of Math.* **128** (1988).
9) H.-B. Foxby, *Math. Scand.* **40** (1977).
10) E.M. Friedlander; J. Pevtsova, *Duke Math. J.* **139** (2007).
11) R. Hartshorne, *Lecture Notes in Math.* **20** (1966).
12) M.J. Hopkins, *LMS Lecture Note Ser.* **117** (1987).
13) ——; J.H. Smith, *Ann. of Math.* **148** (1998).
14) T. Kawasaki, *Trans. AMS* **354** (2002).
15) A. Neeman, *Topology* **31** (1992).
16) R. Rouquier, *Invent. Math.* **165** (2006).
17) ——, *J. K-Theory* **1** (2008).
18) R. Takahashi, *Adv. Math.* **225** (2010).
19) R.W. Thomason, *Compos. Math.* **105** (1997).

（たかはし・りょう，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

*14) 三角圏 $\mathcal{T}$ の次元が n 以下であるとは，ある対象 $G \in \mathcal{T}$ が存在して，$\mathcal{T}$ の任意の対象が G から始めて n 回以下の完全三角を取ることで得られることをいう（ただし，有限直和・直和因子・シフトの差を除く）．

多元環の導来圏入門



伊山 修

多元環の表現論は，単位元を持つ結合的多元環を研究対象とする一分野であり，必ずしも環の可換性を仮定しない．読者の皆さんは，非可換環といえばジャコブソン根基や半単純環に関する構造論，あるいは有限群の群環やリー環の普遍包絡環などの特定の多元環を連想するかも知れない．多元環の表現論が古典理論から大きく飛翔して，数学としての面白さを獲得したのは 1970 年代であり，これは Auslander–Reiten による関手圏，Gabriel による箙（クイバー），Roiter や Drozd による行列問題など，今日では常識となっている基本概念が次々に導入されていった時期である．

以下本文では，特に断らない限り k を代数的閉体とし，有限次元 k 多元環 A を扱う．A の表現論とは，A 加群がどれだけ存在するかを調べるものであり，より正確には，有限生成 A 加群の圏 $\mathsf{mod}A$ の構造を研究するものである．次の古典的な Krull–Schmidt の定理より，加群圏を理解する上で基本的なものは**直既約加群**（2 つの 0 でない加群の直和と同型にならない加群）である．

定理 1 (Krull–Schmidt)　任意の有限生成加群は，有限個の直既約加群の直和と同型となる．さらにこれらの直既約加群は，重複度を込めて一意的に定まる．

直既約加群の同型類が有限個しか存在しない多元環を**有限表現型**と呼ぶが，これは表現論的に最も基本的な多元環のクラスと考えられる．有限表現型の例をいくつか挙げよう．まず 1 変数多項式環 $k[x]$ の剰余環

$$R_n = k[x]/(x^n)$$

である．線形代数学で習うジョルダン標準型の知識を用いると，直既約 R_n 加群が

$$k[x]/(x^i) \quad (i \in \{1, 2, \cdots, n\})$$

の n 個のみであること，特に R_n が有限表現型であることが従う．実は可換の場合は，有限表現型であるものは R_n の直積に限ることが容易に示される．

次に非可換の例として，n 次上半三角行列環

$$T_n = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k & k \\ 0 & k & \cdots & k & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}$$

を挙げよう．可換の場合と異なり，非可換の場合には加群に左右が存在するので，ここでは右加群を扱うことにする．T_n の各行は直既約加群であり，さらにこれらの間の自然な包含関係

$$[kk\cdots kk] \supset [0k\cdots kk] \supset \cdots \supset [00\cdots 0k]$$

に関して剰余加群を構成することにより，計 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の直既約加群が得られる．例えば $n=3$ の場合は，以下の $6 = \frac{3\cdot 4}{2}$ 個である．

$$\begin{aligned} &[kkk],\ [0kk],\ [00k],\ [kk0] := \frac{[kkk]}{[00k]}, \\ &[0k0] := \frac{[0kk]}{[00k]}, \quad [k00] := \frac{[kkk]}{[0kk]}. \end{aligned} \tag{1}$$

実はこれらが直既約 T_n 加群のすべてである．これは後述する Gabriel の定理の特別な場合である．

以上 R_n と T_n の場合について，直既約加群のリストが得られたわけだが，これは表現論の出発点に過ぎない．**AR 理論**（=Auslander–Reiten 理論）とは，加群圏 $\mathsf{mod}A$ の射の成す代数構造を扱うものであり，AR 箙と呼ばれる図を用いて圏構造を図示することを可能とする（詳しくは文献 2, 3) 参照）．一般に**箙**（クイバー）とは，点と矢からなる有向グラフのことだが，

A の **AR 箙**とは以下で定義されるものである．

- 直既約 A 加群の同型類を点とする．
- 直既約 A 加群 X, Y の間に既約射 $X \to Y$ が存在するとき，矢 $X \to Y$ を書く．

ここで**既約射**とは，非自明な方法で 2 つの射の合成として書けない射のことである[*1)]．

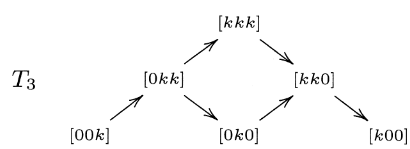
例えば R_n の場合，自然な全射 $k[x]/(x^i) \to k[x]/(x^{i-1})$ および x 倍写像 $k[x]/(x^i) \to k[x]/(x^{i+1})$ は既約射であり，R_n の AR 箙は次のようになる．

$$k[x]/(x) \underset{b_2}{\overset{a_1}{\rightleftarrows}} k[x]/(x^2) \underset{b_3}{\overset{a_2}{\rightleftarrows}} k[x]/(x^3) \underset{b_4}{\overset{a_3}{\rightleftarrows}}$$
$$\cdots\cdots \underset{b_{n-1}}{\overset{a_{n-2}}{\rightleftarrows}} k[x]/(x^{n-1}) \underset{b_n}{\overset{a_{n-1}}{\rightleftarrows}} k[x]/(x^n).$$

AR 理論は，加群圏に関する様々な情報を AR 箙から得ることを可能とする．例えば R_n の場合には，modR_n の圏構造が AR 箙と基本関係式

$$b_2a_1 = 0, \quad b_{i+1}a_i = a_{i-1}b_i \ (1 < i < n)$$

により，完全に与えられることが分かる．また，T_3 の AR 箙は次のようになる（T_n も同様である）．



各矢はいずれも，自然な単射もしくは全射に対応するものである．

AR 箙からも分かるように，対象と射から成る圏の構造を表記する手法として点と矢から成る箙を用いることは極めて有効である．環は加法圏の特別なクラスであり，逆に加法圏は ‘Rings with several objects’ である（Mitchell）ことを思い出すと，環を表記する手法としても箙を用いることは自然である．このことを少し詳しく説明しよう．箙[*2)]が与えられたときに，長さ l の**道**とは，矢の列

$$p = a_1a_2 \cdots a_l$$

で，各 i $(1 \le i \le l-1)$ に対して，a_i の終点と a_{i+1} の始点が一致するものである[*3)]．長さ 0 の道は点に他ならず，長さ 1 の道は矢に他ならない．例えば，箙

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2 \circlearrowleft c$$

では，長さ 2 の道が ac, bc, c^2 の 3 つ存在する．

箙 Q の**道多元環** kQ とは，Q の道を基底に持つ k ベクトル空間のことである．道 $p = a_1 \cdots a_l$ と $q = b_1 \cdots b_m$ の積を

$$pq := \begin{cases} a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_m & (a_l \text{ の終点と } b_1 \text{ の始点が一致する場合}), \\ 0 & (\text{そうでない場合}) \end{cases}$$

により定め，これを k 線形に拡張することにより，kQ に結合的 k 多元環の構造が入る．さらに単位元がすべての点の和で与えられることが分かる．例えば，箙

$$1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3}$$
$$\cdots\cdots \xrightarrow{a_{n-2}} n-1 \xrightarrow{a_{n-1}} n$$

の道多元環は，n 次上半三角行列環 T_n であることが容易に確かめられる．

実は任意の有限次元 k 多元環 A は，ある箙 Q の道多元環 kQ のある剰余環と**森田同値**となる[*4)]．つまり箙と関係式を用いることで任意の有限次元 k 多元環を表記することが可能となるのである．一方，箙の道多元環自体は極めて特殊な多元環である．大域次元が 0 の有限次元多元環は半単純環であり，Artin–Wedderburn による古典的構造論が良く知られているが，大域次元が 1 以下の有限次元 k 多元環は，箙の道多元環と森田同値であることで特徴づけられる．

さて次の Gabriel の定理は基本的である．

定理 2（Gabriel） 箙 Q の道多元環 kQ が有限表現型である必要十分条件は，Q がディンキン型の箙（以下のグラフの辺を矢で置き換えて得られる箙）であること[*5)] である．

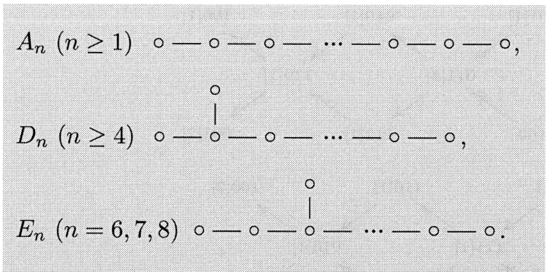
*1) 正確には $f: X \to Y$ が既約射であるとは，射 $g: X \to Z$, $h: Z \to Y$ に対して $f = h \circ g$ が成立すれば，g が分裂単射であるか h が分裂全射となることである．

*2) 以下，点も矢も有限個であるとし，また連結であるもののみ考える．

*3) これを $a_l \cdots a_2a_1$ と表す場合もある．

*4) つまり mod$A$ と modkQ が同値となる．

*5) ここで n は点の個数を表す．基礎体 k が代数的閉体でない場合には，箙を一般化した species と呼ばれるものを考える必要があり，その場合には A, D, E のみならずすべてのディンキン図形が必要となる．



さらに直既約 kQ 加群と，対応するルート系の正ルートの間に一対一対応が存在する．

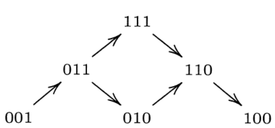
この対応は，直既約 kQ 加群 M に対して，M の**次元ベクトル**（M の組成因子における各単純 kQ 加群の重複度）をとることで与えられる．例えば A_3 型の箙 $1 \to 2 \to 3$ の道多元環 kQ に対し，直既約 kQ 加群は (1) の 6 個で与えられるが，それらの次元ベクトルは順に以下である．

[111], [011], [001], [110], [010], [100].

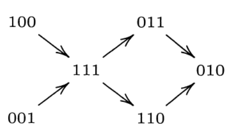
さてここで A_3 型の異なる向き付けの箙

$$Q: \ 1 \to 2 \to 3, \quad Q': \ 1 \leftarrow 2 \to 3,$$
$$Q'': \ 1 \to 2 \leftarrow 3$$

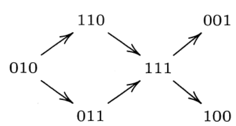
の道多元環に対して AR 箙を比較してみよう[*6]．



kQ



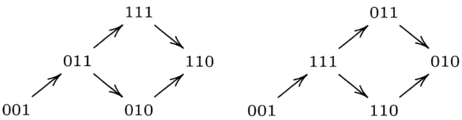
kQ'



kQ''

これらの AR 箙は異なるが，これは実際に加群圏が同値ではない（これらの道多元環が森田同値ではない）ことを反映している．しかしこれらの加群圏の構造には強い類似性が存在することに注意しよう．つまり kQ と kQ' の AR 箙から 1 点 100 を取り除くと，以下の同型な箙が得られる．

*6) 加群の代わりに次元ベクトルを記述している．



同様に kQ' と kQ'' の AR 箙から 1 点 010 を取り除いても，同型な箙となる．これらの部分箙の同型は，対応する部分圏[*7]の圏同値を反映したものであり，**傾理論**により一般的に説明される．

1980 年代, Happel により導来圏を用いた傾理論の現代的解釈が与えられた[4)]．それを次に解説しよう．有限次元多元環 A に対して，$\mathsf{D}(A)$ でアーベル圏 $\mathsf{mod}A$ の有界導来圏を表すことにする．$\mathsf{mod}A$ と同様, $\mathsf{D}(A)$ においても定理 1 の類似が成立し，直既約対象が圏構造の基本単位となる．さらに A の大域次元が有限の場合には，AR 理論を $\mathsf{D}(A)$ において展開することが可能であり，特に圏構造を AR 箙で図示することが可能となる．

箙 Q の道多元環 kQ は大域次元が 1 以下であるので，$\mathsf{D}(kQ)$ の AR 箙を描くことができ，さらに $\mathsf{D}(kQ)$ の直既約対象はすべて

$$M[n] \quad (M \text{ は直既約 } kQ \text{ 加群，} n \text{ は整数})$$

で与えられることが分かる．ここで $[n]$ は複体の n 回シフトを表す．上の A_3 型の箙の道多元環に対して，導来圏の AR 箙を描いてみよう（次頁の上図）．

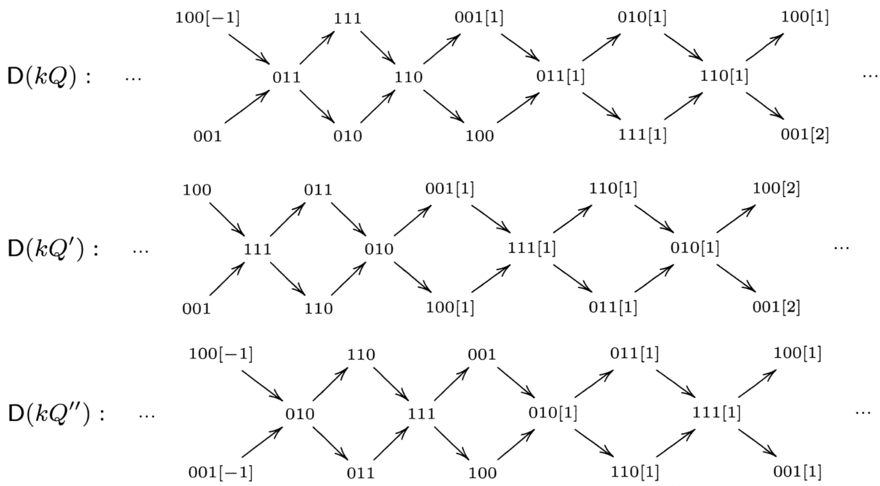
これらの AR 箙はいずれも同型であることが見てとれるが，これは導来圏 $\mathsf{D}(kQ)$, $\mathsf{D}(kQ')$, $\mathsf{D}(kQ'')$ がすべて三角同値であることの反映である．このことは以下の一般的事実から従う．

箙 Q の頂点 i が**シンク**であるとは，i を始点とする矢が存在しないことである．同様に i を終点とする矢が存在しないとき**ソース**と呼ぶ．箙 Q の点 i における**鏡映**を，i を端点とするすべての矢の向きを逆にすることで定める．Happel は次の事実を示した[4)]．

定理 3（Happel）Q を箙，i をシンクまたはソース，Q' を i における Q の鏡映とする．このとき導来圏 $\mathsf{D}(kQ)$ と $\mathsf{D}(kQ')$ は三角同値である．

つまり導来圏によって，異なる向き付けの箙の表現を一度に取り扱うことが可能となるのである．このことからも表現論における導来圏の有用性を想像することは容易だろう．

*7) ねじれ対（torsion pair）と呼ばれる．



この Happel の結果は，Rickard によって導来圏の森田理論に発展した．$\mathsf{D}(A)$ の部分圏で写像錐，シフトおよび直和因子で閉じているものを **thick 部分圏**と呼び，対象 $T \in \mathsf{D}(A)$ を含む最小の thick 部分圏を thick T で表す．このとき $T \in \mathsf{D}(A)$ が**傾複体**であるとは，以下の条件が満たされることである．

- 任意の整数 $i \neq 0$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(A)}(T, T[i]) = 0$.
- thick $A =$ thick T.

次の導来圏版森田理論の基本定理は，様々な応用がなされている．

定理 4（Rickard）　環 A と B に対して，$\mathsf{D}(A)$ と $\mathsf{D}(B)$ が三角同値となる必要十分条件は，A の傾複体 T で，$\mathrm{End}_{\mathsf{D}(A)}(T) \simeq B$ となるものが存在することである．

例えば，定理 4 を用いて定理 3 を示すことができる．前世紀にはこれらの研究が発端となり，傾複体を持つ大域次元が 1 のアーベル圏が詳しく研究された．そこでは箙の道多元環に加えて，Geigle–Lenzing の重み付き射影直線と Ringel の標準多元環が主要な役割を果たす．

今世紀に入り多元環の表現論では，導来圏と傾複体の発展型である様々な対象[*8]が発見され，ますます活発な研究がなされている．1970 年代の第一黄金期に継いで，第二黄金期と言っても過言でないのかも知れない．

本文の締めくくりとして，最近の結果を一つだけ紹介しよう．AR 理論は，有限次元多元環特有の理論というわけではなく，本来は**整環**と呼ばれる非可換ネーター環に対する理論である．特別なクラスとして，可換 **Cohen–Macaulay 環** R 上の極大 Cohen–Macaulay 加群の圏 $\mathsf{CM}(R)$ に対しても研究がなされている[6]．中でも次の結果は古典的であり，代数的マッカイ対応とも呼ばれる．

定理 5（Auslander）　2 次元の単純特異点は有限表現型であり，その AR 箙は拡大ディンキン型の二重箙である．

これより特に，ディンキン型箙 Q と対応する単純特異点 R に対して，圏同値

$$\underline{\mathsf{CM}}(R) \simeq \mathsf{C}_1(kQ) \qquad (2)$$

が得られる．ここで，左辺は $\mathsf{CM}(R)$ の射影加群による剰余圏であり，**安定圏**と呼ばれる．一方，右辺は $\mathsf{D}(kQ)$ の AR 移動関手 τ による軌道圏であり，**1 団圏**と呼ばれる．

最近 Amiot, Reiten との共同研究[1]で，この圏同値の一般化に成功した．そこでは Herschend, Oppermann との共同研究[5]で導入した，次の概念が鍵である：有限次元 k 多元環 A が n **無限表現型**であるとは，大域次元が n で，任意の $i \geq 0$ に対して

$$(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(DA, A)[n])^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A i}$$

が A 加群と同型になることである．例えばディンキ

*8)　名前を挙げておくと団（クラスター）圏，団傾対象，準傾対象，τ 傾対象などである．

ン型でない箙の道多元環は 1 無限表現型である．このとき A 両側加群 $\mathrm{Ext}_A^n(DA, A)$ によるテンソル多元環を考える*9)．

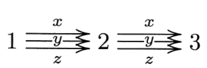
$$B := T_A(\mathrm{Ext}_A^n(DA, A))$$

定理 6[1]　n 無限表現型多元環 A の'良い' 巾等元 e に対して，三角同値

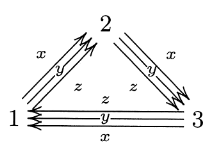
$$\underline{\mathsf{CM}}(eBe) \simeq \mathsf{C}_n(A/(e))$$

が存在する．ここで左辺は安定圏，右辺は $A/(e)$ の n 団圏*10) である．

例えば A として拡大ディンキン型箙の道多元環をとると (2) が得られる．別の例として，n 次の Beilinson 多元環 A をとる（ここでは簡単のため $n = 2$ とする）と，A は箙



と関係式 $xy = yx$, $yz = zy$, $zx = xz$ で表記される．このとき B は箙



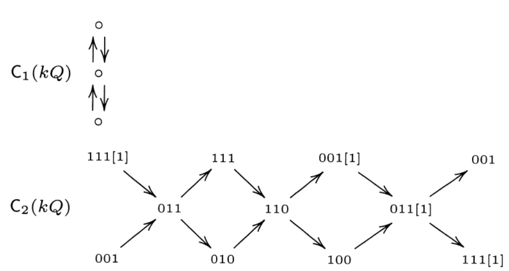
と関係式 $xy = yx$, $yz = zy$, $zx = xz$ で表記される．点 3 に対応する A の巾等元を e とすると，3 変数多項式環 $k[x, y, z]$ の 3 次のベロネーゼ部分環 R と，箙 Q：$1 \equiv\!\!> 2$ の道多元環に対して，次の三角同値が得られる．

$$\underline{\mathsf{CM}}(R) \simeq \mathsf{C}_2(kQ).$$

---

*9)　これを A の**前射影多元環**と呼ぶ．これは $(n+1)$ カラビ・ヤウ多元環となる．

*10)　道多元環 kQ の場合，n 団圏 $\mathsf{C}_n(kQ)$ は $\mathsf{D}(kQ)$ のある自己圏同値による軌道圏である．例えば A_3 型の 1 団圏と 2 団圏の AR 箙は以下で与えられる．



参考文献

1) C. Amiot, O. Iyama, I. Reiten, *Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories*, arXiv:1104.3658.

2) I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol.1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

3) M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalo, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

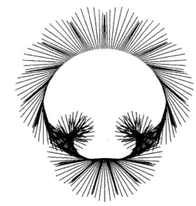
4) D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

5) M. Herschend, O. Iyama, S. Oppermann, *n-representation infinite algebras*, arXiv:1205.1272.

6) Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

（いやま・おさむ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

導来圏と対称性



長尾　健太郎

1. 思い出

学部生の頃，F, M, S, T といった同期の影響を受けて，駒場の緑の中で幾何学や表現論を嗜んでいた*1)．卒業後の進路選択の期限が差し迫る中，漫然とした勉強の反芻の果てに研究者としての明確なビジョンを描けずにいた私は，「幾何学と表現論」という安直な標語を手懸りに師匠の門に辿り着き，縋るが如くそれを敲いた．

やがて，どうも「幾何学と表現論」という標語の安直さは師匠の本意ではないと知る．が，それに代わる言葉を私は持ち合わせていなかった．

あれから 7 年の月日が経って研究者としての自我を持った今，僭越ながら「本意でない」故が少し分かる．院生時代に私が京都の森で浴びた数学に一貫していた哲学を

モジュライ理論における対称性の隔世遺伝

と，ここではあえて小洒落て言わせてもらいたい．

2. モジュライ理論

圏の対象のモジュライ空間を考える．モジュライ空間の構造はしばしば複雑なので，空間そのものよりもむしろ空間から得られる「量」を調べる．

*1) 今では皆それぞれ立派に幾何学あるいは表現論の研究をしている．

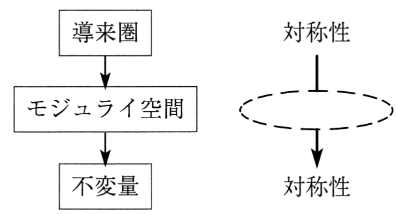


図 1　モジュライ理論における対称性の隔世遺伝．

このコラムではこの量を「不変量」と呼び*2)，モジュライ空間を通じて不変量（の生成関数）を取り出す理論を「モジュライ理論」と呼ぶことにする．

本特集のテーマである導来圏は，しばしば非自明な「対称性」を持つ*3)．導来圏の対象のモジュライ空間を構成するには「安定性条件」を固定する必要があるが，しばしばこれが対称性を壊すため，モジュライ空間のレベルで対称性を観測することはできない．にも関わらず，往々にして不変量のレベルでは「対称性」が復元される（図 1）！

3. Hall 代数

「圏の持つ対称性」の典型例として，ここでは **Hall 代数**を考える．与えられたアーベル圏の Hall

*2) 「量」では語呂が悪いので「不変量」と言っているだけで，何に関して「不変」なのか等は気にしないでいただきたい．

*3) ここで言う「対称性」とは何か，については各読者に最大限拡大解釈していただきたいのだが，一応私なりの言葉で書いておくと，何らかの代数系（= その対称性を支配する代数系）の何らかの「作用」に対して，不変量の生成関数が良い振舞いをすること，である．

代数とは，「短完全列を数え上げる」ことによって定義される結合代数である．

Ringel による発見は，1 次元の圏の Hall 代数として Kac–Moody 代数およびその量子化が現れるということであった．以来，Lustig の理論に代表されるよう，Hall 代数の理論は量子代数を調べるための飛び道具として重要な役割を担ってきた．

4. インスタントンモジュライ

中島[*4)]は，ALE 空間上のインスタントンのモジュライ空間の研究の中で，

- インスタントンのモジュライ理論は，ある 1 次元の圏の「余接束」を取ることで得られる 2 次元 Calabi–Yau 圏の対象のモジュライ理論とみなせること，および
- モジュライ空間の（同変）コホモロジーあるいは（同変）Grothendieck 群に Hall 代数を通じてアファイン（あるいは量子トロイダル）Kac–Moody 代数が作用すること

を発見した．これが「隔世遺伝」が認識された初めての案件であると思われる[*5)]．

Braverman はインスタントン数え上げの母関数をアファイン Kac–Moody 代数の表現論の言葉で特徴付けた（**Whittaker 関数**と呼ばれる[*6)]）．「隔世遺伝」した対称性が母関数を完全に決定づけた，という点において，中島の発見以降始まった数学の流れの 1 つのハイライトと言ってよかろう．

近年では，高階インスタントンのモジュライ理論に隠されている対称性が W **代数**であることが判明し（**AGT 関係**[*7)]），中島の発見以来の革命が起きているように思われる．

5. 3 次元 Calabi–Yau 圏

Joyce による Hall 代数の再発見は,3 次元 Calabi–Yau 圏の対象のモジュライ理論（Donaldson–Thomas 理論）の探究の中でなされた．1 次元および 2 次元 Calabi–Yau における Lie 代数の出現は「奇跡」であり，そこにおいて Hall 代数は当に「飛び道具」だったわけであるが，3 次元 Calabi–Yau における Hall 代数は極めて正統的に使用される．

3 次元 Calabi–Yau 圏の Hall 代数の構造の一部は**クラスター代数**を通じて理解される（本誌 2012 年 1 月号の拙稿をご参考いただきたい）．クラスター代数では掴まえきれていない Hall 代数の構造を理解し，その対称性が Donaldson–Thomas 理論に何をもたらすかを知ることは，今後の課題である．

6. 想い出

中高生のとき初等幾何が大好きだったのだが[*8)]，一時期，射影幾何の技法にハマッていたことがある[*9)]．初等幾何における珠玉の命題が，しばしば 3 次元に持ち上げることによって非常に明快な原理の帰結として理解することができるのだ．射影幾何を使わない冗長な模範解答を眺めながら感じる，自分だけがその問題を本当の意味で理解しているような錯覚が快感だった．

三つ子の魂，百まで．

私が無意識のうちに追い求めているのはそういった快感かもしれない．覆い隠された対称性を掘り起こすことで，少しでも高みから数学を楽しみたいという不遜さが，私の研究の原動力だ．

（ながお・けんたろう，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

*4) ＝師匠．

*5) その後の量子群の表現論への応用が強力だったので，数学者の中ではそちらの方が有名かもしれないが，それは謂わば副産物であったと言ってよい．

*6) Whittaker 関数は戸田作用素の固有ベクトルになっており，これが [Braverman–Etingof] による Nekrasov 予想の（別）証明のあらすじである．

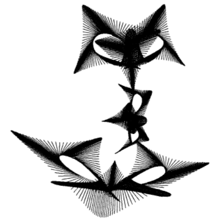
*7) Alday–Gaiotto–立川によって指摘された 2 次元共形場理論と 4 次元ゲージ理論の関係．6 次元超対称性場の理論の存在の帰結として理解される．

*8) それと組合せ論が好きで，解析は苦手だった．

*9) もう 1 つハマッたのは「反転」（＝1 次分数変換）の技法だ．この 2 つの手法に関しては今でも絶対の自信があるが，残念ながら研究で役立ったことはない．

導来圏と数論幾何

L 関数，Galois 表現，モチーフ



伊藤　哲史

1. 素粒子論とモチーフ—「分解」するとはどういうことか

水素を燃焼すると水になるのはなぜでしょうか？ 私たちは，この現象を，水分子（H_2O）が 2 個の水素原子（H）と 1 個の酸素原子（O）に「分解」できるからであると理解しています．では，原子をさらに分解すると何になるのでしょうか？ 現代物理学では，すべての物質は，どんどん細かくしていくと，いつかは**素粒子**になると考えます．素粒子は物質の究極の単位ですから，1 個の素粒子を半分に分けることはできません．すべての物質は有限個の素粒子の集まりで表されます（**整数性**）．私たちは，素粒子を分類し，素粒子どうしのつながり（**相互作用**）を理解することで，少なくとも原理的には，世の中のありとあらゆる物質の性質を統一的に理解できるはずだと考えているわけです．もちろん，素粒子への分解は「目に見える」わけではありませんから，理論的考察と実験結果が矛盾しないことを確かめて，「分解」の様子を想像するしかありません．

実は，このような考え方は，素粒子論とは一見無縁の数論幾何の世界にもあります．数論幾何は数論の問題を幾何的方法で研究する分野です．世の中には様々な**スキーム**（方程式で定義された図形）があり，その数論的性質を解明することが数論幾何の大きな目的です．

スキームが，いくつかの「モチーフ」に「分解」されると想像してみましょう．ここで言う分解は，方程式を因数分解するといった「目に見える」分解とは限りませんから，想像するしかありません．そして，モチーフをどんどん細かくしていくと，最終的には究極の単位である「**純モチーフ**」に分解されると想像しましょう（あたかも分子や原子が素粒子に分解されるように！）．

モチーフの理論では，すべてのスキームは有限個の純モチーフの集まりとして表されると考えます（**整数性**）．純モチーフを分類し（**非可換類体論・Langlands 対応**），純モチーフどうしのつながり（**モチーフの拡大**）を理解することで，少なくとも原理的には，世の中のありとあらゆるスキームの数論的性質を統一的に理解できるはずだと考えるわけです．

素粒子論とモチーフ

素粒子論	モチーフ
物質	方程式・スキーム
素粒子	純モチーフ
原子・分子	混合モチーフ
相互作用	モチーフの拡大
素粒子の分類	非可換類体論

「モチーフ」とは一体何なのでしょうか？ そもそもスキームを「分解」するとはどういうことなのでしょうか？ 実は，純モチーフや，純モチーフの組合せ（拡大）で得られる**混合モチーフ**の「住処」こそが**混合モチーフの圏の導来圏** $D^b(\mathcal{MM})$ なのです．まずは，モチーフ理論に至る（数論幾何的な）背景から始めることにしましょう．

2. Hasse–Weil ゼータ関数

Hasse–Weil ゼータ関数は数論幾何における最も基本的な研究対象の一つです．$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の Hasse–Weil ゼータ関数は **Riemann ゼータ関数**

$$\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots$$

に他なりません．$\zeta(s)$ の解析的性質から，様々な数論的結果を得ることができます．例えば，直線 $\operatorname{Re}s=1$ 上に $\zeta(s)$ の零点が存在しないことから N 以下の素数

の個数が $\frac{N}{\log N}$ で近似できるという**素数定理**が導かれます．$\zeta(s)$ の零点の実部が（“自明” な零点を除いて）直線 $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ 上にあるという **Riemann 予想**は，素数定理のある種の精密化と同値です．$\zeta(s)$ の値もまた興味深い数論的対象と結びついています．$s = -11$ における値

$$\zeta(-11) = \frac{691}{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{691}{32760}$$

の分子に 691 という（不思議な）素数が現れることは，円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{691})$ のイデアル類群の構造と関係しています．$\zeta(s)$ の特殊値の研究は，p 進 L 関数・岩澤理論へと発展しました．

一般に，$\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム X の **Hasse–Weil ゼータ関数**が Euler 積

$$\zeta(s, X) = \prod_{x:X\ \text{の閉点}} \frac{1}{1 - |\kappa(x)|^{-s}}$$

で定義されます．$\kappa(x)$ は閉点 $x \in X$ における X の剰余体です（X は $\mathbb{Z}$ 上有限型なので $\kappa(x)$ は有限体です）．$\zeta(s, X)$ は複素平面に有理型関数として解析接続されると予想されていますが（**解析接続予想**[6]），これは一般には非常に難しい予想と考えられています．X が楕円曲線，すなわち方程式 $y^2 = x^3 + ax + b$ (a, b は $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ を満たす整数）で定義されるスキームの場合は，Wiles により突破口が開かれ，Breuil, Conrad, Diamond, Taylor らにより解決された**楕円曲線の保型性予想**の帰結として解析接続予想が証明されています（保型性予想から Fermat の最終定理が導かれますから，『解析接続予想は Fermat の最終定理と同じくらい難しい』と言えるかもしれません）．最近では，Calabi–Yau 超平面などの特別な高次元スキームに対しても解析接続予想が証明されています．解析接続予想が解決されている場合はそれほど多くはありませんが，いずれの場合も，X の Hasse–Weil ゼータ関数を**保型表現**の L 関数と結びつけること——**非可換類体論**を（部分的に）実現すること——が鍵となっています．

さて，$\zeta(s)$ の解析的性質は素数やイデアル類群の深い性質と関係しましたから，その一般化である Hasse–Weil ゼータ関数 $\zeta(s, X)$ が，X の数論的性質と関係すると期待するのは自然なことでしょう．代数体 K の整数環から定まるスキーム $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ の Hasse–Weil ゼータ関数は K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ に等しく，**類数公式**

$$\lim_{s \to 0} \frac{\zeta_K(s)}{s^r} = -\frac{h_K R_K}{w_K}$$

により，$\zeta_K(s)$ の $s = 0$ での解析的性質が，単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ の階数 r，捻れ部分群の位数 w_K，K の**類数** h_K，**単数基準** R_K という数論的不変量と結びつきます．楕円曲線 X の $\mathbb{Q}$-有理点の集合 $X(\mathbb{Q})$ は有限生成アーベル群の構造を持ちます（Mordell の定理）．その階数を r とおき，捻れ部分群を $X(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ とおくと，有名な **BSD**（Birch and Swinnerton–Dyer）**予想**によれば，

$$\lim_{s \to 1} \frac{L(s, X)}{(s-1)^r} = \frac{|\text{Ш}(X)| \cdot \Omega_X \cdot R_X \cdot \prod_p c_p}{|X(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}|}$$

が期待されます．ここで，

$$L(s, X) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(s, X)}$$

は X の L **関数**で，Ш (X) は X の **Tate–Shafarevich 群**です．Ш (X) はイデアル類群の一般化と考えられるので，BSD 予想は『類数公式の楕円曲線版』と言えます．より一般の高次元スキームでも同様の予想が研究されています．高次元の場合は，有理点だけでなく，Chow 群，代数的 K 群，モチヴィック・コホモロジーなどが重要な役割を果たします．これらの不変量を用いて $\zeta(s, X)$ の零点の位数や特殊値を表す予想——**Beilinson 予想**，**Bloch–加藤予想**（**玉河数予想**）など——が提唱され，深く研究されています．

3. Hasse–Weil ゼータ関数を「分解」する

多くの場合に，Hasse–Weil ゼータ関数 $\zeta(s, X)$ がより「小さな」関数の積に「分解」することを説明しましょう．

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ を 2 次体とすると，K の Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi)$$

のように積の形に分解します．χ は 2 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標（$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ の**保型表現**）で，$L(s, \chi)$ は **Dirichlet の L 関数**です．また，有限アーベル群の指標の理論と**類体論**を使うことで，有限次アーベル拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対しても同様の分解が示されます．X が楕円曲線のとき，

$$\zeta(s, X) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L(s, X)}$$

という分解はすでに説明しました．保型性予想や BSD 予想が直接関係するのは L 関数 $L(s, X)$ ですから，

$L(s,X)$ は X の本質的な情報を持つ因子であると考えられます．

このような分解は，エタール・コホモロジーから定まる **Galois 表現**を考察することで説明できます．l を素数，X を $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームとすると，l 進エタール・コホモロジー

$$H^i(X) := H^i(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

は Galois 表現——有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_l$-線形空間で絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が連続に作用するもの——を定めます．一般に，V を Galois 表現とすると，各素数 p に対して **Frobenius 固有多項式**と呼ばれる多項式

$$P_p(t,V) = \det\left(1 - t \cdot \mathrm{Frob}_p; V^{I_p}\right)$$

が定まります（Frob_p は**幾何的 Frobenius 元**，I_p は p における**惰性群**．正確には，すべての p に対する局所因子を正しく定義するには V が**代数的**という条件を満たす必要がありますが，ここでは省略します）．そして，（代数的な）Galois 表現 V の **L 関数**が，

$$L(s,V) = \prod_p \frac{1}{P_p(p^{-s},V)}$$

で定義されます．エタール・コホモロジーから定まる Galois 表現の L 関数の交代積

$$\prod_{i=0}^{2\dim(X\otimes\mathbb{Q})} L\big(s, H^i(X)\big)^{(-1)^i}$$

は，Hasse–Weil ゼータ関数 $\zeta(s,X)$ と（有限個の Euler 因子を除き）一致します．こうして，$\zeta(s,X)$ を，各 $H^i(X)$ からの寄与に分解することができます．

$L\big(s,H^i(X)\big)$ がさらに分解されることもあります．例えば，X をレベル N の**モジュラー曲線**とすると，X の Hasse–Weil ゼータ関数は保型表現の L 関数の積で表されます．もう少し詳しく説明すると，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ のレベル N の**保型表現**で無限成分が重さ 2 の正則離散系列であるものを $\pi_1,\ldots,\pi_r$ とおくと，Hecke 作用素の作用で 1 次コホモロジー $H^1(X)$ を分解すると，Galois 表現が

$$H^1(X) = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\pi_i}$$

と分解し（**Eichler–志村の定理**），L 関数の分解

$$L\big(s,H^1(X)\big) = \prod_{i=1}^{r} L\left(s - \frac{1}{2}, \pi_i\right)$$

が得られます（V_{π_i} は π_i に**伴う Galois 表現**）．楕円曲線の保型性予想は，任意の楕円曲線 E の L 関数 $L(s,E)$ が，適当な N に対してこの分解の右辺に現れるという予想でした．モジュラー曲線の一般化である**志村多様体**の Hasse–Weil ゼータ関数と保型表現の L 関数の関係は，非可換類体論の幾何的実現とも関係して，現代の数論幾何の主要な研究テーマの一つとなっています．

4. 純モチーフの圏 $\mathcal{M}$

Hasse–Weil ゼータ関数 $\zeta(s,X)$ の解析的性質は X の数論的性質を反映していると期待されます．そこで，

> 『$\zeta(s,X)$ の分解に応じて，X を何らかの意味で「分解」することで，$\zeta(s,X)$ の性質を統一的に理解できるのではないか』

と想像してみましょう．

予想 1　次の性質を満たす有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の純モチーフの圏 $\mathcal{M}$ が存在する．$\mathcal{M}$ の対象を**純モチーフ**という．

1. （**半単純性**）$\mathcal{M}$ は半単純な $\mathbb{Q}$-線形テンソル圏である．
2. $\mathbb{Q}$ 上の射影的で滑らかなスキーム X に対し，X の**モチーフ**と呼ばれる対象 $h(X) \in \mathcal{M}$ が存在する．$X \mapsto h(X)$ は反変関手である．
3. （**重さ**）任意の単純対象 $\alpha \in \mathcal{M}$ に対し，**重さ**と呼ばれる整数が定まる．これにより，任意の純モチーフは，重さごとの純モチーフの直和に一意的に書かれる．さらに，X が d 次元であれば，直和分解 $h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} h^i(X)$ であって，$h^i(X)$ の重さは i となるものが存在する．
4. （**Galois 表現・L 関数**）任意の素数 l と $\alpha \in \mathcal{M}$ に対し，代数的 l 進 Galois 表現 $H(\alpha)$ を定めることができる．$\alpha \mapsto H(\alpha)$ は共変関手である（H を **l 進実現関手**という）．ベクトル空間 $H(\alpha)$ の次元を，α の**階数**という．X を $\mathbb{Q}$ 上の射影的で滑らかなスキームとし，$\alpha = h^i(X)$ とすると，$H(\alpha)$ は X の i 次エタール・コホモロジーから定まる Galois 表現と一致する．Galois 表現の L 関数を経由することで，任意の純モチーフ $\alpha \in \mathcal{M}$ に対し，L 関数 $L(s,\alpha)$ を定めることができる．
5. （**単純モチーフの分類，非可換類体論**）対応 $\alpha \mapsto H(\alpha)$ によって，$\mathcal{M}$ の単純対象と代数的な既約 l 進

Galois 表現が一対一に対応する．また，階数 n の単純対象 $\alpha \in \mathcal{M}$ に対し，α と（平行移動を除いて）同じ L 関数を持つ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の代数的な尖点的保型表現 π_α が存在する．この対応 $\alpha \mapsto \pi_\alpha$ も一対一の対応である．こうして期待される一対一の対応 $H(\alpha) \leftrightarrow \pi_\alpha$ を**非可換類体論**または $\mathrm{GL}(n)$ **の大域 Langlands 対応**という．

6. **(不変量)** 代数的 K 群やモチヴィック・コホモロジーといった L 関数の特殊値の予想（Beilinson 予想，Bloch–加藤予想など）に必要な不変量は，任意のモチーフに対して定義できる．

これは，純モチーフについて一般に信じられている予想に，Tate 予想，大域 Langlands 予想，Fontaine–Mazur 予想などの数論的予想を組み合わせたものです．

思想的には，$\mathcal{M}$ の半単純性は大切です．一口に X を「分解」すると言ってもその意味はそれほど明らかではありませんが，$\mathcal{M}$ を用いることでその意味を数学的に確定させることができます．すなわち，X **の分解**を，モチーフ $h(X)$ を $\mathcal{M}$ の中で単純対象の直和として $h(X) = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_r$ のように表すことと定めるわけです．$\mathcal{M}$ は半単純アーベル圏ですから，このような直和への分解は順序を除き一意的です．

もし予想 1 が正しければ，$h(X)$ の $\mathcal{M}$ における分解は，Galois 表現の既約分解に対応し，非可換類体論を通じて $\zeta(s, X)$ を保型 L 関数の積で書く分解に対応します．保型 L 関数の解析的性質（解析接続，関数等式，極の位置など）を使うことで $\zeta(s, X)$ の解析的性質を調べることができるようになります．

歴史的には，「モチーフ」の概念は，**Weil 予想**（有限体上の代数多様体に対する Riemann 予想の類似）の解決のために Grothendieck によって 1960 年代に考案されたものです．Grothendieck は，代数的サイクルの**標準予想**と呼ばれる一連の予想群を提出し，標準予想を仮定した上で $\mathcal{M}$ の候補を構成しました．その後，Jannsen は，（標準予想を仮定せずに）半単純アーベル圏 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}$（**数値的モチーフの圏**）を構成しました．Jannsen の証明は短くエレガントです．$\mathcal{M}_{\mathrm{num}}$ が求める圏の候補であることは疑いようはありませんが，$\mathcal{M}_{\mathrm{num}}$ の対象に対して（標準予想を仮定せずに）Galois 表現や L 関数を自然に定義することはできませんので，実際の応用には向いていません．標準予想を仮定しなくても，より扱いやすい圏 $\mathcal{M}_{\mathrm{hom}}$（**ホモロジカル・モチーフの圏**）を構成することはできます．$\mathcal{M}_{\mathrm{hom}}$ の対象には自然に Galois 表現を定めることができますから，応用上は $\mathcal{M}_{\mathrm{hom}}$ で十分なことも多いようです．しかし（標準予想を仮定しない限り）$\mathcal{M}_{\mathrm{hom}}$ が半単純かどうかは分かりませんので，「分解」の意味を確定させることはできません．

5. 混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}$

予想 1（のうちのいくつか）を満たす純モチーフの圏 $\mathcal{M}$ が存在すると仮定しましょう．$\mathcal{M}$ を使って数論幾何の研究を行いたいわけですが，次のような疑問が沸きます．

- 射影的とも滑らかとも限らないスキーム X に対して，そのモチーフ $h(X)$ は定義できないか？
- Hasse–Weil ゼータ関数や L 関数の解析的性質は，代数的 K 群やモチヴィック・コホモロジーなどの不変量を用いて理解されると期待されている．それらの不変量はモチーフの圏の中でどのように捉えればよいのか？

1980 年代に Beilinson と Deligne は，純モチーフの圏 $\mathcal{M}$ を含むアーベル圏 $\mathcal{MM}$ の存在を予想しました．$\mathcal{MM}$ を使うことで，上の疑問に答えることができると期待されています．

予想 2　次の性質を満たす有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の**混合モチーフの圏** $\mathcal{MM}$ が存在する．

1. $\mathcal{MM}$ はリジッドな $\mathbb{Q}$-線形テンソル圏で，純モチーフの圏 $\mathcal{M}$ を含む．$\mathcal{M}$ は $\mathcal{MM}$ の半単純な対象のなす部分圏と一致する．$\mathcal{MM}$ は **Tate 対象**と呼ばれる対象 $\mathbb{Q}(n) \in \mathcal{MM}$ ($n \in \mathbb{Z}$) を含み，$\alpha \in \mathcal{MM}$ に対し **Tate 捻り** $\alpha(n) := \alpha \otimes \mathbb{Q}(n) \in \mathcal{MM}$ が定義される．
2. 任意の $\alpha \in \mathcal{MM}$ は**重さフィルトレーション**
$$\cdots \subset W_{i-1}\alpha \subset W_i\alpha \subset W_{i+1}\alpha \subset \cdots$$
を持つ．部分商 $W_i\alpha/(W_{i-1}\alpha)$ は重さ i の純モチーフである．
3. $\mathbb{Q}$ 上の（射影的とも滑らかとも限らない）スキーム X に対して，X の**モチーフ**と呼ばれる対象 $h(X) \in \mathcal{MM}$ と，X の**コンパクト台モチーフ**と呼ばれる対象 $h_c(X) \in \mathcal{MM}$ が定まる．
4. 任意の $\alpha \in \mathcal{MM}$ に対し，α のコホモロジー（エタール・コホモロジーや特異コホモロジーなど）を定

義することができる．$h(X)$ のコホモロジーは X のコホモロジーと一致し，$h_c(X)$ のコホモロジーは X のコンパクト台コホモロジーと一致する．エタール・コホモロジーから定まる Galois 表現を通じて，混合モチーフ $\alpha \in \mathcal{MM}$ に対し，α の L 関数 $L(s,\alpha)$ が定義できる．

5. $\mathbb{Q}$ 上の滑らかなスキーム X と $p,q \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathcal{MM}$ における拡大群は**モチヴィック・コホモロジー**と一致する．

$$H^p_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(q)) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{MM}}\big(\mathbb{Q}(0), h(X)(q)\big)$$

（この式でモチヴィック・コホモロジーを定義する流儀もある）．また，$H^p_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(q))$ は**代数的 K 群** $K_{2p-q}(X)\otimes\mathbb{Q}$ の Adams 作用素に関する重さ p の固有空間と一致する．$p=2q$ なら，$H^{2q}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(q))$ は X の **Chow 群** $CH^q(X)\otimes\mathbb{Q}$ と一致する．

半単純な $\mathcal{M}$ が，半単純でないアーベル圏 $\mathcal{MM}$ に埋め込まれ，$\mathcal{MM}$ におけるモチーフの拡大（相互作用！）を通じて，Hasse–Weil ゼータ関数や L 関数に関する予想をホモロジー代数の枠組みで統一的に捉えることができるという壮大な予想です．$\mathcal{MM}$ の構成法はまだ知られていませんが，もし $\mathcal{MM}$ が存在すれば，様々な数論的予想を統一的に研究する「舞台」が整うことになります．

6. 混合モチーフの圏の導来圏 $D^b(\mathcal{MM})$

数論幾何の予想を統一的に理解するためにモチーフの圏が提唱されたわけですが，残念ながら，モチーフの研究を取り巻く状況は統一されているとは言い難いものでした．そもそも，$\mathcal{M}$, $\mathcal{MM}$ の存在でさえ，標準予想などの多くの予想に依存しています．それらを使って本格的な研究を行うなど夢のまた夢といったところでしょう．現実には，ある程度良い性質を満たす圏を（予想を仮定せずに）暫定的に定義して，その上で議論を行うという手法がとられています．Deligne は代数的サイクルの一般化である**絶対 Hodge サイクル**を使うことでモチーフの圏（の代替物）を定義し，虚数乗法論，志村多様体，CM アーベル多様体の周期などの数論的問題に応用しています．これ以外にも，コホモロジー関手の「実現」を使ったモチーフの圏（の代替物）の定義（Jannsen, Huber）や，淡中圏を使った定式化も提唱されており（Nori），用途に応じて使い分けられているのが現状です．

ところで，アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して，**導来圏** $D^b(\mathcal{A})$ と呼ばれる三角圏が定まります．ホモロジー代数的な種々の操作は $D^b(\mathcal{A})$ の上で行うことができますから，$D^b(\mathcal{A})$ のほうが $\mathcal{A}$ よりも本質的な情報を持っていると考えられます．こう考えると，実は，私たちが欲しいのは $D^b(\mathcal{MM})$ だということになります．

1990 年代後半になって，混合モチーフの研究に大きな進展（方針転換）がありました．その（大胆な）アイデアを一言で言えば，

『導来圏 $D^b(\mathcal{MM})$ は予想を仮定しなくても構成できる．』

というものです．まず $\mathcal{M}$ を作り（この段階で標準予想が必要！），$\mathcal{M}$ の拡大として $\mathcal{MM}$ を作り，$\mathcal{MM}$ から導来圏 $D^b(\mathcal{MM})$ を作ると考えるのが自然な道筋ですが，そうではなく，最初からいきなり $D^b(\mathcal{MM})$ を作ってしまおうという逆転の発想です．もう少し正確に言うと，混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}$ は現在も構成されていませんが，三角圏であって $\mathcal{MM}$ の導来圏として期待される様々な性質（ホモトピー不変性，Mayer–Vietoris 系列，Künneth 公式，Poincaré 双対性，モチヴィック・コホモロジーや代数的 K 群と Ext 群の関係など）を持つものが，一切の予想を仮定せずに構成できることが発見されたのです（圏の構成法はやや技術的ですので省略します．興味のある方は文献 4, 5）を参照してください）．もちろん，$D^b(\mathcal{MM})$ が構成されただけでモチーフに関するすべての問題が解決されるというわけではなく，依然として定理より予想のほうがはるかに多いのが現状です．少なくとも混合モチーフの正しい「住処」は確定したと言えるでしょう．

さて，もし $D^b(\mathcal{MM})$ に良い **t-構造**を定めることができれば，三角圏の一般論により $D^b(\mathcal{MM})$ からアーベル圏 $\mathcal{MM}$ を “切り出す” ことができます．$D^b(\mathcal{MM})$ に良い t-構造を定める問題は現在でも未解決です．しかし，Tate 対象 $\mathbb{Q}(n)$ で生成された $D^b(\mathcal{MM})$ の部分圏には（予想を仮定せずに）良い t-構造を定めることができます．この t-構造を使ってアーベル圏を切り出すことで，**混合 Tate モチーフ**の圏 $\mathcal{MTM}$ が構成されます．実は，$\mathcal{MTM}$ は $\mathbb{Z}$ 上で構成することができ，最近の研究では**多重ゼータ値**

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{n_1>\cdots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

への応用が得られています．多重ゼータ値を $\mathcal{MTM}$ のモチヴィック・Galois 群と関係付けることが鍵です．混合モチーフの圏の導来圏という雲の上のような存在が，$\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ のような具体的な対象の研究にも役立っています．

本稿では触れることができませんでしたが，数論幾何では，l 進層やエタール・コホモロジーの分解も大切です．これについても少しだけ述べておきましょう．Deligne が考察した導来圏における分解定理や，純 l 進層の圏の半単純性は，現代の数論幾何の根幹をなす最も基本的な定理と言っても過言ではありません[1~3]．その後，Deligne の定理は**偏屈層の分解定理**に深く一般化され，代数幾何・表現論などに広く応用されていることはご存じの通りです．最近の Ngô による**基本補題**の解決では，（数理物理でもおなじみの）**Hitchin ファイブレーション**を有限体上で考察し，そのエタール・コホモロジーをエンドスコピー群の軌道積分の形にあわせて導来圏の中でうまく分解することが鍵となりました．導来圏における分解は，今日もなお，数論幾何の様々な場面で重要な役割を果たしています．

参考文献

1) P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHÉS*, no.**35** (1968), 259–278.
2) P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHÉS*, no.**52** (1980), 137–252.
3) P. Deligne, Décompositions dans la catégorie dérivée, Motives, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol.**55**, Amer. Math. Soc., 1994, 115–128.
4) M. Levine, Mixed motives, in *Handbook of K-Theory* (E. Friedlander, D. R. Grayson ed.), Springer-Verlag, 2005.
5) V. Voevodsky, A. Suslin, E. M. Friedlander, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, *Ann. of Math. Stud.*, Princeton Univ. Press, 2000.
6) 伊藤哲史，「非可換類体論の現状—ゼータ関数の解析接続法」，特集：数論の探求 ゼータからその世界に迫る，数理科学 2011 年 1 月号，40–45, サイエンス社．
7) 伊藤哲史，「1995 年：フェルマー予想解決」，特集：この 20 年で数学に何が起こったか，数学セミナー 2011 年 4 月号，14–20, 日本評論社．
8) 伊藤哲史，「数論幾何におけるガロア理論」，特集：ガロア生誕 200 年，数学セミナー 2011 年 10 月号，21–25, 日本評論社．

（いとう・てつし，京都大学大学院理学研究科）

シンプレクティック幾何と導来圏

植田　一石

1. ハミルトン形式の解析力学

天体の運行にしろ，あるいはバネで繋がれた質点や振り子，剛体などの運動にしろ，古典力学に従う有限自由度の系の運動はニュートンの運動方程式によって記述される．これを変分原理を用いて書き直すのが解析力学であり，大きく分けて**ラグランジュ形式**と**ハミルトン形式**の２つ（あるいはこれに**ハミルトン–ヤコビ形式**を付け加えた３つ）がある．

簡単のために３次元空間においてポテンシャル V を持つ力によって駆動される質点の運動を考えよう．質点の質量は１とし，t を時刻，$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を直交座標系で表した質点の運動とすると，ニュートンの運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}V, \quad \boldsymbol{\nabla}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

と表される．一方，ラグランジュ形式では $\boldsymbol{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ を一般座標とするとき，質点の運動は作用

$$S = \int L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})dt$$

を最小にするという**最小作用の原理**によって定まり，**オイラー–ラグランジュ方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

を満たす．ここで $L = K - V$ はラグランジアンと呼ばれ，K は運動エネルギー，V はポテンシャルである．

ニュートンの運動方程式と比較したときのラグランジュ形式の解析力学の大きな利点は，一般座標 $\boldsymbol{q}$ として必ずしも直交座標を取る必要がないことである．例えばポテンシャル V が中心力で，考えている系が球対称なときには，直交座標よりも球座標を取るほうが，はるかに見通しが良くなる．もちろん，まずニュートンの運動方程式を書き，次に合成関数の微分（連鎖律）を使って同じ方程式を球座標で書き直すことはできるが，それよりは最初から対称性が顕な形で記述するほうが，理論的にも，また計算をする上でも便利なことが多い．

ラグランジュ形式ではニュートンの運動方程式と同じく２階の常微分方程式によって運動が記述され，方程式の一般解には変数の数の２倍の積分定数が現れる．別の言い方をすると，ある時刻における系の状態を記述するには，その時刻における一般座標だけではなく，その微分（一般速度）も知る必要がある．配位空間（一般座標が記述している空間）を N とおくと，運動方程式の初期値の空間は N の接束 TN になる．

ラグランジアンは一般座標と一般速度の関数であるが，これを**ルジャンドル変換**することによって，**ハミルトニアン**と呼ばれる新しい関数が導入される：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L.$$

ここで $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$ は一般運動量と呼ばれ，ハミルトニアン H は一般座標 $\boldsymbol{q}$ と一般運動量 $\boldsymbol{p}$ の関数になる．変換前の一般座標と一般速度の組 $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ は接束 TN に住んでいたが，変換後の一般座標と一般運動量の組 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ はその双対束である余接束 $M:=T^*N$ に住んでいる．この一般座標と一般運動量からなる空間は**相空間**（phase space）と呼ばれる．

運動方程式はハミルトニアンを用いて

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1}$$

と書かれ，ハミルトンの**正準方程式**と呼ばれる．これは1階の常微分方程式であり，しかも一般座標 $\boldsymbol{q}$ と一般運動量 $\boldsymbol{p}$ に関して，符号を除くと対称な形をしている．この方程式の背後には M 上の2次微分形式 $\omega=\sum_i dp_i\wedge dq_i$ があり，符号は外積代数の反対称性から来ている．

2. シンプレクティック多様体

上の状況を抽象化して，次の定義をする：

定義 1. シンプレクティック多様体とは，滑らかな多様体 M とその上の非退化かつ閉な2次微分形式 ω の組 (M,ω) のことである．

シンプレクティック多様体 (M,ω) と M 上の関数 H が与えられると，正準方程式 (1) によって M 上のベクトル場が定まるが，これを H の定める**ハミルトニアンベクトル場**と呼ぶ．M がリーマン多様体のとき，M 上の関数 f に対して f の勾配ベクトル場と呼ばれる M 上のベクトル場が定まるが，ハミルトニアンベクトル場は勾配ベクトル場のシンプレクティック幾何における類似物である．また，M が後述するケーラー多様体の場合には，H のハミルトニアンベクトル場は H の勾配ベクトル場を「90度回転」して得られる．

一見するとハミルトン形式は，ラグランジュ形式から変数の数を2倍に増やして方程式を1階化しただけのように思われるかも知れないが，これには大きな利点がある．それは，変数を増やすことによって変数変換の自由度が増えて，方程式を簡単にする余地が増すことである．ここでは主に次のような2種類の変換を考える：

一つは M から M への微分同相写像 $\phi: M\to M$ で，シンプレクティック形式 ω を保つ（つまり，$\phi^*\omega=\omega$ が成り立つ）ものであり，**シンプレクティック同相写像**と呼ばれる．

もう一つは，時間に依存するハミルトニアン $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を用いて，正準方程式 (1) で M の各点を流して（つまり，運動方程式による時間発展を考えて）得られる M の同相写像であり，**ハミルトン同相写像**（あるいは完全シンプレクティック同相写像）と呼ばれる．

定義から，ハミルトン同相写像はシンプレクティック同相写像の特別な場合になっている．これらの変換の中には，座標と運動量を混ぜるような一見奇妙なものも含まれるが，理論的な考察を行う際にも，あるいは方程式を具体的に解く際にも，このようにして増えた自由度が大切な働きをする．

3. ケーラー多様体

複素幾何とシンプレクティック幾何は，一見すると全く違う種類の幾何学であるが，ある面では非常によく似ている*1)．どちらも偶数次元であり，実多様体を適当な意味で「2重に」したものだと思える．

実多様体 N が与えられたとき，余接束 $M=T^*N$ はシンプレクティック多様体の典型例であり，解析力学の故郷でもある．N の局所座標を $(q_1,\ldots,q_n)$，それに対応する T^*N のファイバー方向の座標を $(p_1,\ldots,p_n)$ とするとき，T^*N の自然なシンプレクティック構造は

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i$$

で定義される．

*1) 全くの余談であるが，シンプレクティック（symplectic）という単語は，ラテン語に起源をもつ複素（complex）という単語と同じ意味を持つようにギリシア語を組み合わせてワイルが創ったのであった．

一方，接束 $W=TN$ は余接束と双対の関係にあり，自然な直和分解 $TW=TN\oplus TN$ において，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

というブロック対角行列が W の接空間に自然に複素構造を定める．

これら 2 つの異なる種類の幾何（と，それに加えてリーマン計量の 3 つ）を同時に持つのが**ケーラー多様体**である．しかも，これらの 3 つの構造の間には整合性があって，シンプレクティック構造，複素構造およびリーマン構造の 3 つのうちの 2 つが与えられれば，残りの 1 つは自動的に定まる．古典的に知られているコンパクトなシンプレクティック多様体の多くはケーラー多様体の構造を持つ．また，ケーラー多様体の中でも特にリッチ曲率が 0 になるものをカラビ–ヤウ多様体と呼び，超弦理論や後に述べるミラー対称性との関係で非常に重要である．

4. 対称性と保存則

理論物理学における最も美しいアイデアの一つは，対称性と保存則が 1 対 1 に対応しているというネ**ーターの定理**であろう．これにより，例えばエネルギー保存則は時間並進に対する対称性，運動量保存則は空間並進に対する対称性，そして角運動量保存則は空間回転に対する対称性に対応している．ネーターの定理はこれらの対応を統一的に扱うだけでなく，古典論と量子論の垣根を超えて成り立つという意味でも，真に基本的かつ重要な定理である．

系の対称性が高ければ高いほど保存量が増え，実質的な自由度が減って扱いやすくなる．一方，互いに可換かつ独立な対称性の数は相空間の次元の半分を超えないことが容易に分かる．系の性質が最も良く分かるのは，可能な限り多く（すなわち，相空間の次元の半分）の互いに可換（かつ関数的に独立）な保存量があるときであるが，これを満たすハミルトン系を（リュービユの意味での）**完全可積分系**と呼ぶ．

完全可積分系においては，系の軌跡は初期条件で決まる保存量の等位面に含まれ，等位面のコンパクトな連結成分はトーラスになる．さらに，保存量とそれに正準共役な変数（いわゆる作用・角変数）を適切に選ぶことによって，系の運動は等位面上の等速直線運動になる．これらの主張は**アーノルド–リュービユの定理**と呼ばれる．

5. すべてはラグランジュ部分多様体である

相空間は，配位空間に運動量を付け加えて「2 重に」することで得られるが，運動量が零である点からなる相空間の部分多様体は配位空間と自然に同一視できる（余接束 $M=T^*N$ の零切断を N と同一視している）．この部分多様体は，M のシンプレクティック形式 ω の制限が零になるという著しい性質を持っており，しかもそのような性質を持つ部分多様体の中で，包含関係に関して極大になっている．この 2 つの性質を持つ M の部分多様体のことを M のラグランジュ部分多様体と呼ぶ：

定義 2. シンプレクティック多様体 (M,ω) の部分多様体 L がラグランジュ部分多様体であるとは，$\omega|_L=0$ かつ $\dim L=\frac{1}{2}\dim M$ が成り立つことを指す．

ラグランジュ部分多様体の典型的な例としては，上で挙げた余接束の切断の像の他に，可積分系における保存量の等位面や，ケーラー多様体の実部分多様体などがある．

また，シンプレクティック同相写像 $f:(M_1,\omega_1)\to(M_2,\omega_2)$ は，そのグラフを考えることによって，直積 $(M_1\times M_2,\pi_1^*\omega_1-\pi_2^*\omega_2)$ のラグランジュ部分多様体の特別な場合と考えることができる．特に，シンプレクティック多様体 M_1 と M_2 がともにある多様体 N の余接束で，このラグランジュ部分多様体が直積 $N\times N$ の上の関数 F の微分 dF のグラフとして与えられているとき，F を正準変換の母関数と呼ぶ．具体的には，M_1 の

座標を $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$，$M_2$ の座標を $(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ とおくと，母関数 $F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})$ を用いて，変換前後の変数の関係は

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i},\quad P_i=-\frac{\partial F}{\partial Q_i}$$

と書ける．F は $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{Q}$ の関数なので，まず左式を解くことによって $\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ の関数として表すことができ，次に右式を解くことによって $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ の関数として定まる．

この様に，シンプレクティック幾何における重要な概念の多くがラグランジュ部分多様体の言葉で書けるので，「**すべてはラグランジュ部分多様体である**」というスローガンを掲げる人もいる．すべてというのは少し大袈裟だとしても，ラグランジュ部分多様体の研究がシンプレクティック幾何の中心的な問題であることは間違いない．

6. フレアーコホモロジーと深谷圏

時間に依存するハミルトニアンによって生成されるシンプレクティック同相写像をハミルトン同相と呼ぶのであった．シンプレクティック同相とハミルトン同相の違いは，閉形式と完全形式の違いの非線形化であり，それだけに微妙な問題でもあるが，これに関しては次の予想がある：

予想 1（アーノルド）．M をコンパクトなシンプレクティック多様体とし，c_M を M 上のすべての滑らかな関数にわたる臨界点の個数の下限とする．このとき，M 上の任意のハミルトン同相写像は c_M 個以上の固定点を持つ．

この予想は，周期的なハミルトニアンを持つ力学系が c_M 個以上の周期解を持つと言い換えることもできる．

例えば $M=T^2$ のとき，平行移動は固定点を全く持たないシンプレクティック同相写像の例を与える．一方，$c_M=3$ であり，ハミルトン同相写像は必ず 3 つ以上の固定点を持つ．

この予想はアーノルドの弟子のギーベンタールによって，ラグランジュ部分多様体に対する主張に拡張された．この拡張は「すべてはラグランジュ部分多様体である」という哲学に沿っており，ハミルトン同相写像のグラフに適用することによってアーノルド予想を復元する．

アーノルド予想やアーノルド–ギーベンタール予想に対するアプローチとしてフレアーが導入したのが**フレアーコホモロジー**である．これは無限次元のモース理論であり，一般には計算することはおろか，厳密な定義を与えることすら難しいが，一旦定義されれば，そこから直ちに自明でない結論が導かれる強力な理論でもある．

フレアーコホモロジーは通常のコホモロジー理論と同様に結合的な積構造を持つ．しかし，導来圏の哲学によると，コホモロジーをとることは精妙かつ重要な情報を落とすことになるので，なるべくコホモロジーを取る前の複体のレベルで物事を取り扱うべきである．ところが，複体のレベルでの積は一般に結合的ではなく，その非結合性の度合いを測る「高次の積」が存在することが分かる．1 次の積が微分，2 次の積が通常の積，3 次の積がマッセイ積で，これが 4 次，5 次，$\cdots$ と一般には無限に続く．これらの無限個の積によって，フレアー複体には $\boldsymbol{A_\infty}$ **構造**と呼ばれる代数的な構造が入る．こうして，シンプレクティック多様体 M に対し，M のラグランジュ部分多様体を対象とし，それらの間のフレアー複体を射の空間とするような A_∞ 圏ができるが，これを M の**深谷圏**と呼び，$\mathfrak{Fuk}\,M$ で表す．

7. 深谷圏の導来圏

上のようにして得られた深谷圏 $\mathfrak{Fuk}\,M$ はそのままでは写像錐を取る操作に関して閉じておらず，ホモロジー代数的な議論をするには不便である．たとえラグランジュ部分多様体にしか興味がなくても，これらの操作に関する「完備化」を行う（つまり，任意の射に対する写像錐を形式的に付け加える）ことで，考察の対象をより大きな圏に広げておくと都合が良い．これは，たとえ自然数にしか興味がなくても，整数や有理数，実数，複素数，p 進数などを考えることで，自然数についての有

益な知見がもたらされることと同様である．このようにして，M のラグランジュ部分多様体だけではなく，それらの複体（より正確には，ボンダル–カプラノフ–コンセビッチの意味での捻れ複体）を対象に持つ三角圏が得られる．これを M の**深谷圏の導来圏**と呼び，$D^b \mathfrak{Fuk}\, M$ で表す．

8. ホモロジー的ミラー対称性

深谷圏の導来圏が最も本質的に使われるのはコンセビッチによる次の予想であろう：

予想 2（ホモロジー的ミラー対称性）．任意のカラビ–ヤウ多様体 M に対し，別のカラビ–ヤウ多様体 W が存在して，M の深谷圏の導来圏 $D^b \mathfrak{Fuk}\, M$ と W の連接層の導来圏 $D^b \operatorname{coh} W$ が三角圏として同値になる：

$$D^b \mathfrak{Fuk}\, M \cong D^b \operatorname{coh} W.$$

この予想は導来圏を使わずに定式化しようとすると不自然かつ不完全なものになる．実際，M のラグランジュ部分多様体が与えられたときに，W 側で対応するものが連接層ではなく，連接層の導来圏の対象（つまり，各項が連接層からなる複体）にしかならないことはしばしば起こる．また，M のハミルトン自己同相は M の深谷圏 $\mathfrak{Fuk}\, M$ の自己同値を引き起こし，これがさらに M の深谷圏の導来圏 $D^b \mathfrak{Fuk}\, M$ の自己同値を誘導するが，これに対応する $D^b \operatorname{coh} W$ の自己同値が連接層を連接層に移さないことも珍しくない．そもそも，連接層の圏 $\operatorname{coh} W$ はアーベル圏であるが，深谷圏 $\mathfrak{Fuk}\, M$ は A_∞ 圏であり，これはアーベル圏はおろか通常の意味での圏ですらない（射の合成の結合律がコホモロジーのレベルでしか成り立たない）ので，これらの 2 つの圏の関係を述べるには多かれ少なかれ導来圏またはそれに類似した言葉を用いる必要がある．

9. ラグランジュトーラスファイブレーション

実多様体の接束と余接束の全空間がそれぞれ，コンパクトではない（概）複素多様体とシンプレクティック多様体の典型的な例を与えたことを思い出そう．これらは互いに双対なベクトル束であり，ファイバー方向を双対な格子で割ることによって，コンパクトな例を作ることができる．これらの例は双対なトーラスを共通の底空間の上に並べた形をしており，おのおののトーラスはラグランジュ部分多様体になっている．

一般に，任意のカラビ–ヤウ多様体はラグランジュトーラスを適当な底空間の上に並べた形で書けるということをストロミンガー，ヤウおよびザスロウが予想した．この予想は，この 3 人の頭文字をとって **SYZ 予想**と呼ばれている．アーノルド–リュービユの定理によって，ラグランジュトーラスファイブレーションは完全可積分系とほぼ同義なので，これはすべてのカラビ–ヤウ多様体が完全可積分系の構造を持つという予想だと言っても良い．また，彼らはこのラグランジュトーラスが与えられたホモロジー類の中で体積を最小にするように取れることや，同じ底空間の上に元のトーラスと双対なラグランジュトーラスを並べることによってミラー多様体が得られるということも予想している（図 1）．

この状況で，M のラグランジュ部分多様体と W の連接層の間の関係は，ある種のフーリエ変換で記述されると期待されている．特に，ミラーの全空間の構造層 $\mathcal{O}_W$ はファイブレーションの切断に対応すると考えられるが，この切断は底空間と同相な M のラグランジュ部分多様体になり，そ

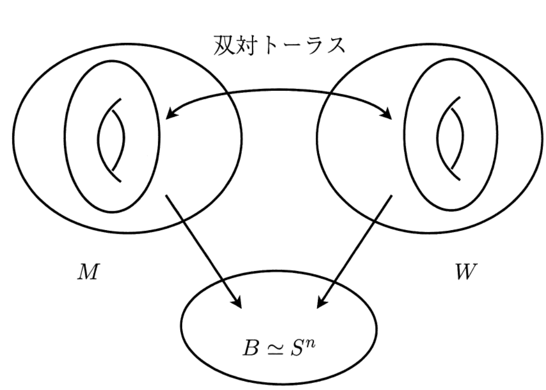


図 1　SYZ 予想．

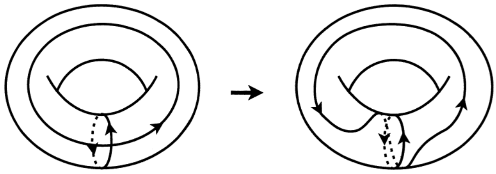


図2　2次元のデーン捻り．ミラーのザイデル–トーマス捻りは真に導来圏的な操作であり，絵には描けない．

のフレアーコホモロジーは球面のコホモロジーと同型になる．従って，底空間は球面と同相になると期待されるが，その場合にはこの切断に沿ったデーン捻りという操作があり，これが M のハミルトン同相を与える（図2）．ここから $D^b \mathfrak{Fuk}\, M$ の自己同値が定まるが，これに対応する $D^b \operatorname{coh} W$ の自己同値は，$\mathcal{O}_W$ に沿ったザイデル–トーマス捻りと呼ばれる操作になると考えられている．デーン捻りは M のラグランジュ部分多様体をラグランジュ部分多様体に移すが，$\mathcal{O}_W$ に沿ったザイデル–トーマス捻りは W 上の連接層を W 上の連接層に移すとは限らないので，導来圏まで行かないとこれらの間に対応をつけることはできない．

文献案内

解析力学の教科書としては

1) ランダウ，リフシッツ，（広重徹，水戸巌訳）『力学』，東京図書（増訂第3版，1974）

が薄くて良くまとまっている．他に定評のある教科書としては

2) ゴールドシュタイン，（瀬川富士，矢野忠，江沢康生訳）『新版 古典力学（上），（下）』（（上）1983，（下）1984，POD版，2005），吉岡書店

がある．数学者の書いた本としては

3) アーノルド，（安藤韶一，蟹江幸博，丹羽敏雄訳）『古典力学の数学的方法』，岩波書店（1980）

が挙げられよう．深谷圏について日本語で読める本と言えば，何と言っても

4) 深谷賢治，『シンプレクティック幾何学』，岩波書店 (2008)

だろう．この本は内容だけでなく参考文献も豊富であり，単に教科書としてだけでなく，文献ガイドとしても優れている．

深谷圏についての基本文献は

5) Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono, “Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics”, American Mathematical Society (2009)

である．また，

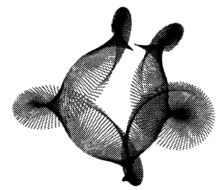
6) Paul Seidel, “Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory”, European Mathematical Society (2008)

では，完全シンプレクティック多様体という強い仮定のもとで，深谷圏の構造を具体的に記述する方法について議論している．

（うえだ・かずし，大阪大学大学院理学研究科）

特集／導来圏をめぐって

導来圏の幾何学と量子コホモロジー



入谷　寛

1. コホモロジー環

一般に位相空間 X に対して**コホモロジー群**$H^i(X,\mathbb{Q})$, $i=0,1,2,\ldots$ が定まり，その直和

$$H^*(X,\mathbb{Q})=\bigoplus_{i\geq 0}H^i(X,\mathbb{Q})$$

は**カップ積** $\cup$ により（次数付き可換な[*1]）次数付き環の構造を持つ．空間 X が向きづけられたコンパクト n 次元多様体のとき，コホモロジー群 $H^i(X,\mathbb{Q})$ は X の中の $n-i$ 次元の部分集合（サイクル）（の適当な同値類）の有理数係数の線形和たちからなっており，有限次元の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である．サイクルの言葉ではカップ積 $\cup$ は 2 つのサイクルの交わりをとる操作に対応する．コホモロジー群および積構造 $\cup$ は空間 X を曲げたり伸ばしたり「連続的に」変形しても変わらないことが知られている．例えばコホモロジー群 $H^i(X,\mathbb{Q})$ の次元は i 次の Betti 数と呼ばれ，X のホモトピー不変量を与える．

2. 量子コホモロジー環

量子コホモロジー環はコホモロジー環の積構造（カップ積）を形式的なパラメータ q で変形したものである．ベクトル空間としてはもともとのコホモロジー群に形式的冪級数環 $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ をテンソル積した空間

$$QH(X)=H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}[\![q]\!]$$

であって，そこに $\lim_{q\to 0}*=\cup$ を満たす（やはり次数付き可換な）**量子積** $*$ が入っている．量子コホモロジーは一般の位相空間に対してではなく，**シンプレクティック多様体**と呼ばれる特別な構造を持った偶数次元の多様体に対して定まる[*2]．もともとのカップ積がサイクルの交わりであったのに対して，量子積はサイクルが（擬正則）球面を仲立ちにして交わる「量子効果」も考慮に入れる．コホモロジー環と同様，量子コホモロジー環はシンプレクティック多様体 X を（シンプレクティック多様体の範疇で）曲げたり伸ばしたり「連続的」に動かしても変わらない．これはホモトピー不変性よりは弱い性質であるが，量子コホモロジーはシンプレクティックトポロジーの不変量を与えるものと考えることができる．

3. 関手性（functoriality）

圏と関手の言葉で言えば，コホモロジー環は「位相空間と連続写像のなす圏」から「$\mathbb{Q}$ 上の代数と $\mathbb{Q}$ 上の環準同型のなす圏」への**反変関手**を定めている．これは次のことを意味する．任意の連続写像 $f\colon X\to Y$ に対して逆向きの環準同型 $f^*\colon H^*(Y)\to H^*(X)$（積構造を保つベクトル空間の間の線形写像）が定まり，連続写像の合成 $f\circ g$ に対して対応する準同型も合成となる：$(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$．一方で，量子コホモロジー環に対してこのようなよい関手的性質は知られていない．まず第一にシンプレクティック多様体の間の「射」が何かを定義しなければならない．もちろんシンプレクティック多様体としての同型（symplectomorphism）が射として考えられるが，それ以外に何を射とすればよいかはあまり自明ではない[*3]．

4. 導来圏

量子コホモロジーはシンプレクティック多様体に対

*1) 次数付き可換とは $\alpha\cup\beta=(-1)^{(\deg\alpha)(\deg\beta)}\beta\cup\alpha$ が満たされること．

*2) 偶数次元の多様体 X は非退化かつ閉な 2 次微分型式 ω を持つとき，シンプレクティック多様体であるという．

*3) 2 つのシンプレクティック多様体 X, Y の間の「射」としては例えば積 $X\times Y$ のラグランジアン部分多様体 L が考えられる（ラグランジアン対応）．

して定義されるものであったが，一方で**導来圏**（ここでは連接層の導来圏を考える）は一般に**複素多様体**に対して定義される圏である．詳細は他の論説に譲るが，これは極めて巨大な代数系であって複素多様体に関する豊富な情報を含んでいる．実際，特別な場合[*4]には導来圏はもともとの複素多様体を復元することもある．また導来圏は双有理幾何ともかかわりが深く，例えば複素多様体の双有理変換であるフロップ（flop）やクレパント解消などで繋がっている多様体は同値な導来圏を持つと予想されている．

シンプレクティック多様体と複素多様体は多様体の異なる範疇であるが，その交わりの中には**射影多様体**（射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の部分複素多様体）のクラスが含まれる．本コラムでは導来圏と量子コホモロジーを両方扱うので，以下の話では空間は射影多様体とする．

5. 量子コホモロジーと導来圏の関係？

量子コホモロジーと双有理幾何あるいは導来圏の幾何との関係について，次の予想がある．

予想　滑らかな射影多様体 X と Y の導来圏が同値であるならば，量子コホモロジー $QH(X)$ と $QH(Y)$ は**パラメータ q に関する解析接続の下で**同型になる．

これは双有理幾何の文脈で Yongbin Ruan により提唱されてきたもの（の導来圏版）であって，量子コホモロジーに対するある種の「関手性」と見なすことができる．導来圏は多様体の複素構造を強く反映した圏でありシンプレクティック構造とは無関係である．一方，量子コホモロジーはシンプレクティック多様体の不変量であって複素構造には依存しない．そのことを考えるとこの予想は少し奇妙な感じがする．ただ，導来圏がもともとの複素多様体とほとんど同じ情報を含む巨大な代数系であることを考えれば，導来圏の同値という仮定はかなり強いものである．また上の予想で一つ注意すべき点があり，それは「パラメータに関する解析接続」と書いた部分である．実は，量子コホモロジーのパラメータ q はシンプレクティック構造（シンプレクティック型式のコホモロジー類）のパラメータと見なすことができる．古典極限 $q=0$ はシンプレクティック構造が無限大になる**極大体積極限**である．「解析接続の下で同型」というのは，X の量子積がそのパラメータ q_X に関して収束し[*5]，Y の量子積のパラメータ q_Y とのある変換 f

$$q_Y = f(q_X), \quad f(0) \neq 0$$

によって両者の量子積が同一視される，という意味である．ここで $f(0) \neq 0$ は解析接続が必須であることを示している．これは比喩的には X のシンプレクティック構造を巨大体積極限 $q_X = 0$ から変形してゆくと巨大体積極限 $q_Y = 0$ での Y になると考えてもよいが，X と Y はそもそもトポロジーが違う可能性があり，この解析接続を単なるシンプレクティック構造の変形として理解できるとは限らない．

6. 非可換空間の量子コホモロジー？

ここでは（Connes の意味での非可換幾何ではなく）導来圏など三角圏あるいは DG 圏を「非可換」空間と見なす立場をとる．すなわち空間 X の代わりにその上の連接層の導来圏 $\mathcal{T}$ を出発点におき，$\mathcal{T}$ から圏論的に定義されるものを研究するという立場である．一般の三角圏 $\mathcal{T}$ は何らの空間の導来圏ではないかもしれないが，$\mathcal{T}$ 自身を「非可換空間」と見なす．先の予想が正しいとすると，より一般に非可換空間（三角圏）$\mathcal{T}$ から出発して**量子コホモロジーの変形族**が定まるのではないかという希望が生まれる．

真に非可換なものではないが，それに近いものとして近年 Ruan らにより定義された**特異点に対する量子コホモロジー**を挙げておく．特異点に対する量子コホモロジーは **LG/CY 対応**と呼ばれる，特異点とカラビ・ヤウ多様体の間のある種の等価性に関する予想において重要な役割を担っている．Orlov により特異点の導来圏と対応するカラビ・ヤウ多様体の導来圏は同値であることが知られており，これらは同じ「非可換空間」を定めると考えられる．特異点はいわゆる「多様体」ではないが，この場合も先の予想と同様，特異点とカラビ・ヤウ多様体の量子コホモロジー（さらに高種数の理論も）が解析接続で繋がることが予想されている．

（いりたに・ひろし，京都大学大学院理学研究科）

*4）例えば Fano 多様体と呼ばれる，Ricci 曲率が正の多様体の場合など．

*5）ア・プリオリには量子積はパラメータ q に関する形式的な冪級数でしかない．

導来圏とミラー対称性



梶浦　宏成

1. はじめに

このタイトルの意味するところは「導来圏を使ってミラー対称性を議論する」ということであり，それはつまり，現在「ホモロジー的ミラー対称性」と呼ばれるもののことである．このように呼ばれるのは，様々な数学的対象に対して導来圏を定める方法があり，導来圏はその数学的対象の上でホモロジー代数を展開するための親玉のようなものであるからであり，我々も習慣上そう呼んでいるが，内容的には「(導来) 圏論的ミラー対称性」と呼んだほうがより明確かも知れない．

ミラー対称性は，もともとは超弦理論の研究において発見されたものであるが，あるシンプレクティック多様体とある複素多様体が双対の関係にあるという幾何学の問題として定式化される．以下，このシンプレクティック多様体，複素多様体と呼ばれる空間について説明したのち，ミラー対称性（予想）などについてもう少し説明していく．

2. シンプレクティック多様体と複素多様体

平面 $\mathbb{R}^2$ は，集合としては単に 2 つの実数 x, y で定められる点 (x, y) の集まりであるが，その上に様々な構造を入れることができる．まずは位相が入り，任意の 2 点 $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ をひとつながりの道でつなぐことができる．さらに，2 変数 x, y の関数を考え，2 変数の微積分を展開することもできる．パラメーター $0 \leq t \leq 1$ と，それを変数とする微分可能な関数 f, g によって $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C を $\{f(t), g(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$ と表すと，その曲線 C の長さ L を考えることができ，

$$L = \int_0^1 \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

となる．このように長さが定義できるのは，$\mathbb{R}^2$ 内のベクトルの長さが自然に定められていることによる．より詳しくは，$\mathbb{R}^2$ の各点 (x, y) について，(x, y) を始点とするベクトル $v = (v_1, v_2), v' = (v'_1, v'_2)$ の間の内積が

$$\langle v, v' \rangle = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 \tag{1}$$

と定まっている．これより，C の $(f(t), g(t))$ における接ベクトル $v_t := (f'(t), g'(t))$ に対して $L = \int_0^1 \sqrt{\langle v_t, v_t \rangle} dt$ と定められているのである．一般に，内積 (1) として異なるもの（一般には (x, y) に依存するもの）を考えると，異なる長さが定義されることになる．このような内積の構造は，幾何学において**計量**と呼ばれる．

この他にも，$\mathbb{R}^2$ 上に様々な構造を考えることができる．一つは，点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $x + \sqrt{-1}y$ と表すことによって $\mathbb{R}^2$ は複素平面 $\mathbb{C}$ とみることができる．つまり，$\mathbb{R}^2$ 上には複素構造が定まる．一方，(1) のような内積のかわりに，「反対称な内積」

$$\omega(v, v') = -\omega(v', v) := v_1 v'_2 - v_2 v'_1$$

を考えることもできる．この ω は，$\mathbb{R}^2$ 上のシンプレクティック構造と呼ばれるものを定めている．

これらの高次元への拡張として，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造とシンプレクティック構造を定めることができる．複素構造は単に，$\mathbb{R}^{2n}$ を $\mathbb{C}^n$ とみなすことによって与えられる．シンプレクティック構造は，反対称内積

$$\omega(v,v') := \sum_{i=1}^{n}(v_i v'_{n+i} - v_{n+i}v'_i)$$

によって与えられる．ここで $v = (v_1, \ldots, v_{2n})$ などとした．$\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造，シンプレクティック構造は本質的には上のものに同値となる．奇数次元のとき，$\mathbb{R}^{2n+1}$ 上に $\mathbb{R}^2$ のときの安直な拡張がないのは明らかであるが，実際 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上に複素構造，シンプレクティック構造は存在しない．

より一般の空間は以下のようにして構成できる．次元 d を固定し，$\mathbb{R}^d$ をたくさん用意する．それぞれの $\mathbb{R}^d$ について開集合をとり，これらの開集合をはりあわせていく．はりあわせるのりしろの部分は伸ばしたり縮めたりしてもよいが「しわ」ができないようにし，また，自分自身をはりあわせることはしないこととする．このようにしてできる空間が多様体である．今の場合 d 次元多様体ができる．$d = 2n$ の場合について，このはりあわせの操作を，それぞれの $\mathbb{R}^{2n}$（の開集合）上の複素構造が「うまくつながる」ようにできるとき，そうしてできた多様体を**複素多様体**と呼ぶ．それぞれの $\mathbb{R}^{2n}$（の開集合）上のシンプレクティック構造が「うまくつながる」ようにできるとき，それを**シンプレクティック多様体**と呼ぶ．この「うまくつながるように」という条件があるため，$2n$ 次元多様体が常にシンプレクティック構造や複素構造を持つわけではない．

このように，幾何学においては様々な構造付きの多様体が主な研究対象となる．n 次元多様体で計量の構造が一つ定められているものはリーマン多様体と呼ばれるものである．計量は空間の曲がり具合を指定するものであり，一般相対論の定式化を与える*1)．複素構造は素粒子論における超対称性（超は超弦理論の超と同じ意味）と関係する．シンプレクティック構造は解析力学を起源の一つとする．複素構造とシンプレクティック構造両方を持ち，それらが適切な両立条件を満たすものとして**ケーラー多様体**というものがあり，その中でさらに性質のよいものとして**カラビ・ヤウ多様体**がある．

*1) 正確には，一般相対論においてはリーマン計量を少し拡張した擬リーマン計量を扱う．

3. ミラー対称性

ミラー対称性は，もともと弦理論において，2つのカラビ・ヤウ多様体の間の双対性として発見された．より正確には，あるカラビ・ヤウ多様体の組 A, B に対し，A を複素構造を忘れてシンプレクティック多様体とみなし，B を複素多様体とみなすと，そのシンプレクティック多様体 A に対して定まる様々な構造が複素多様体 B に対して定まる様々な構造と同値になることが発見された．様々な構造のうち一番簡単なものとしては，A のコホモロジーとして定まる $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間と B のコホモロジーとして定まる $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間が同型になる*2)．A に対して，コホモロジーが同型になるものは B 以外にたくさんあるだろうが，話はそれにとどまらず，A に対して定まるグロモフ・ウィッテン不変量と B の複素構造の変形理論がどちらもフロベニウス構造というものを定め，その2つの構造が同型であることまで示された．これが双対と呼ばれる通り，A を複素多様体とみなし，B をシンプレクティック多様体とみなしても同様のことが起こる．この発見から，すべてのカラビ・ヤウ多様体 A に対し，上の意味でミラー双対なカラビ・ヤウ多様体 B が存在するだろうというのがミラー対称性予想である．さらに，カラビ・ヤウ多様体に限らず，一般のケーラー多様体などに対しても多少設定を拡張することによってミラー対称性が定式化できることが期待され，現在も盛んに研究されている．ミラー対 (A, B) の構成法についても SYZ（Strominger–Yau–Zaslow）による提案があり，現在かなりたくさんのミラー

*2) より詳しくは，次数を少し混ぜる特別な同型が存在する．この同型は位相的ミラー対称性と呼ばれる．

対が知られている．例えば，最も基本的なミラー対として偶数次元トーラス $\mathbb{T}^{2n} := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{2n}$ がある．$\mathbb{T}^{2n}$ 上にはシンプレクティック構造，複素構造の両方が存在し，特にそれらの組で（広い意味での）カラビ・ヤウ多様体の構造を定めるものがある．このミラー双対もあるカラビ・ヤウ多様体の構造が入った $\mathbb{T}^{2n}$ となる．

4. ホモロジー的ミラー対称性

ミラー対称性に関して具体的には次のような問題を考えることができる．まず，ある数学的構造の集まり（圏）を考え，それを $\mathfrak{S}$ と書く．シンプレクティック多様体の集まりを $\mathfrak{A}$，複素多様体の集まりを $\mathfrak{B}$ と書き，対応 $\mathcal{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{S}$, $\mathcal{G}:\mathfrak{B}\to\mathfrak{S}$ を固定する．$\mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ としてとるものは上で述べたようなものを想定しているがすぐあとに説明する．

問題 4.1 （SYZ などの意味で）ミラー対であると考えられるカラビ・ヤウ多様体の組 (A,B) に対し，$\mathcal{F}(A)$ と $\mathcal{F}(B)$ が同型であることを示せ．

最も簡単な場合は $\mathfrak{S}$ が $\mathbb{C}$ ベクトル空間の集まり，シンプレクティック多様体 $A\in\mathfrak{A}$ と複素多様体 $B\in\mathfrak{B}$ に対して $\mathcal{F}(A)\in\mathfrak{S}$, $\mathcal{G}(B)\in\mathfrak{S}$ はそれぞれのコホモロジーである．本格的な問題としては，$\mathfrak{S}$ がフロベニウス構造の集まり，$\mathcal{F}(A)$ が A のグロモフ・ウィッテン不変量の定めるフロベニウス構造，$\mathcal{G}(B)$ が B の複素構造の変形理論から定まるフロベニウス構造の場合である．これは位相的閉弦理論（の種数ゼロの部分）に対応する構造であり，一般に単にミラー対称性というとこのことを指すことが多いように思われる．

ホモロジー的ミラー対称性（予想）とは，上の問題で $\mathfrak{S}$ を導来圏の集まりとしたものである*3)．ここで，$\mathcal{G}(B)$ は B 上の連接層の導来圏を考える．$\mathcal{F}(A)$ を定めるのは難しいのであとで説明を付け加えるが，A_∞ 圏として定められるべき A 上の深谷圏 $Fuk(A)$ の導来圏というものを考える．まとめると，ホモロジー的ミラー対称性（予想）とは，「ミラー対 (A,B) に対し，A 上の深谷圏の導来圏 $\mathcal{F}(A)$ と B 上の連接層の導来圏 $\mathcal{G}(B)$ が同値になる」という予想である．現在も活発に，様々な例において様々なレベルでこの予想が肯定的に議論されている．

ここで，この導来圏同値 $\mathcal{F}(A)\simeq\mathcal{G}(B)$ が成り立つということはどういうことか，もう少し考えてみよう．まず，$\mathcal{F}(A)$ と $\mathcal{G}(B)$ が圏同値とは粗くいうと以下のことである．

- （同型な対象を同一視したとき）$\mathcal{F}(A)$ の対象と $\mathcal{G}(B)$ の対象が $1:1$ に対応する．
- $\mathcal{G}(B)$ の任意の対象 $X,Y\in\mathcal{G}(B)$ と，上の意味で対応する $\mathcal{F}(A)$ の対象 $\check{X},\check{Y}\in\mathcal{F}(A)$ に対し，射の空間 $\mathcal{F}(A)(\check{X},\check{Y})$ と $\mathcal{G}(B)(X,Y)$ が加群として同型となる．
- 上の対象と射の対応が，$\mathcal{F}(A)$ と $\mathcal{G}(B)$ の射の合成と両立する．

導来圏は三角圏の構造を持ち，導来圏同値 $\mathcal{F}(A)\simeq\mathcal{G}(B)$ とは $\mathcal{F}(A)$ と $\mathcal{G}(B)$ が三角圏として同値であること，つまり，圏同値であって $\mathcal{F}(A)$ と $\mathcal{G}(B)$ の三角圏の構造と両立するもののことである．

導来圏は無限個の対象を持つため，このような三角圏同値を手でみつけるのは不可能に近いようにみえる．実際難しいことは確かであるが，実はこの複雑にみえる三角圏の構造がむしろ役に立ってかなりのことが分かる場合が多い．以下このことに関して少し説明する．

5. 三角圏の DG 増強

上で述べたように，ホモロジー的ミラー対称性とは 2 つの三角圏の同値性のことであった．三角圏 $\mathcal{T}$ は，まず「次数ずらし」の自己同型 $T:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ を持つ．つまり，対象と射を一斉に T でうつしても同じ圏 $\mathcal{T}$ となる．そして，その名の通り三角構造を持つ．$\mathcal{T}$ が三角構造を持つとは，粗くいうと，$\mathcal{T}$ の任意の射 $f:X\to Y$ に対して対象 $Z\in\mathcal{T}$ が（同型を除いて）一意的に決まり，対象と射の列

*3) あとで分かるように，「$\mathfrak{S}$ は三角圏の集まりである」というほうが正確である．

$$\cdots \to T^{-1}(Z) \to X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X) \xrightarrow{T(f)} T(Y) \to \cdots$$

が存在してそれが適切な性質を持つことをいう．適切な性質として，例えば上の $Y \to Z$ の部分の射を g と書くと，それに対して一意的に決まる対象は $T(X)$ と同じになり，上と同じ対象と射の列が得られるという，三角構造と呼ばれるにふさわしい条件を含んでいる．

三角圏 $\mathcal{T}$ に対し，いくつかの対象の集まり $\{X_1, X_2, \dots\}$ を考えよう．これらの対象を T^n, $n \in \mathbb{Z}$ でずらしたものをすべて考え，さらにそれらからなる $\mathcal{T}$ の充満部分圏の射 $f : X \to Y$ に対して上で述べた意味で三角構造から決まる対象 $Z \in \mathcal{T}$ を付け加えていく．こうしてできる，$\mathcal{T}$ の三角構造で閉じた $\mathcal{T}$ の充満部分圏は三角圏 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ をなす．$\mathcal{T}'$ が $\mathcal{T}$ と圏同値となるとき，$\{X_1, X_2, \dots\}$ を $\mathcal{T}$ の**生成系**と呼ぶ．このとき生成系 $\{X_1, X_2, \dots,\}$ からなる $\mathcal{T}$ の充満部分圏は $\mathcal{T}$ を復元するであろうか？ 一般に答えは NO である．実際，上で $\mathcal{T}'$ を構成する際に $\mathcal{T}$ の三角構造を使っていることに注意する．実は，三角圏にある付加構造を加えて補強することによって答えは YES となる．三角圏の DG 増強，A_∞ 増強と呼ばれるものがそれにあたる．例えば連接層の導来圏 $\mathcal{T} = \mathcal{G}(B)$ は，B が十分よいものであれば自然に DG 増強を持つ．この場合，連接層のアーベル圏（=連接層を対象とするアーベル圏）から，連接層の複体の圏 $Ch(B)$ を作り，そのホモトピー圏の局所化として連接層の導来圏 $\mathcal{G}(B)$ が得られるが，$Ch(B)$ のかわりにある自然な DG 圏を構成することができる．まず，$Ch(B)$ の対象は連接層の複体である．対象を

$$X_a := \{\cdots E_a^{-1} \xrightarrow{d_a^{-1}} E_a^0 \xrightarrow{d_a^0} E_a^1 \xrightarrow{d_a^1} \cdots\}$$

などと表そう．各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して E_a^i は連接層，$d_a^i : E_a^i \to E_a^{i+1}$ は連接層の間の射であるが，ここでは連接層の定義などを思い出す必要はない．複体なので $d_a^{i+1} \circ d_a^i = 0$ が満たされていることに注意する．対象 $X_a, X_b \in Ch(B)$ に対し，$Ch(B)$ の射 $\phi : X_a \to X_b$ は，連接層の間の射の集まり $\{\phi^i : E_a^i \to E_b^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ であって図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E_a^{-1} & \xrightarrow{d_a^{-1}} & E_a^0 & \xrightarrow{d_a^0} & E_a^1 & \xrightarrow{d_a^1} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^0} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & E_b^{-1} & \xrightarrow{d_b^{-1}} & E_b^0 & \xrightarrow{d_b^0} & E_b^1 & \xrightarrow{d_b^1} & \cdots
\end{array}$$

を可換にするものである．DG 圏 $DG(B)$ の場合，対象は $Ch(B)$ と同じとし，X_a から X_b への次数 $r \in \mathbb{Z}$ の射として射の集まり $\{\phi^i : E_a^i \to E_b^{i+r}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を考える．つまり，X_a から X_b への射の空間 $DG(X_a, X_b)$ は，次数付き加群

$$DG(X_a, X_b) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} DG^r(X_a, X_b)$$

となる．射の合成はもともとの射の合成から自然に定まる．これを

$$m : DG(X_b, X_c) \times DG(X_a, X_b) \to DG(X_a, X_c)$$

と書こう．射の空間に微分 $d_{ab} : DG^r(X_a, X_b) \to DG^{r+1}(X_a, X_b)$ が

$$d_{ab}(\phi^i) := d_b^{i+r} \circ \phi^i - (-1)^r \phi^i \circ d_a^{i-1}$$

によって定まる．ここで $\{\phi^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in DG^r(X_a, X_b)$ とした．この微分と射の合成 m は以下の性質を持つ．

$$\begin{aligned}
&(d_{ab})^2 = 0, \\
&d_{ac}(m(\phi_{bc}, \phi_{ab})) \\
&= m(d_{bc}(\phi_{bc}), \phi_{ab}) + (-1)^{|\phi_{bc}|} m(\phi_{bc}, d_{ab}(\phi_{ab})), \\
&\quad m(m(\phi_{cd}, \phi_{bc}), \phi_{ab}) = m(\phi_{cd}, m(\phi_{bc}, \phi_{ab})).
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\phi_{ab} \in DG(X_a, X_b)$ などとし，特にそれらは次数 $|\phi_{ab}|$ を持つものとした．1 つ目の性質が微分の性質であり，もともと $d_a^{i+1} \circ d_a^i = 0$ などが成り立っていたことから従う．2 つ目の性質は微分の合成（積）m に関するライプニッツ則，3 つ目の性質は合成の結合則である．一般にこのような構造を持つ圏を DG 圏と呼ぶ．

この DG 圏 $DG(B)$ において，次数 0 で $d_{ab}(\phi_{ab}) = 0$ を満たす射 ϕ_{ab} たちのみを考えると，それは射の合成について閉じていて $DG(B)$

の部分圏をなすが，この部分圏が $Ch(B)$ に他ならない．いいかえると，$Ch(B)$ の射は $DG(B)$ の次数ゼロの閉形式である．一方 $Ch(B)$ のホモトピー圏 $K(B)$ とは，対象は $DG(B)$ と同じものとし，射の空間を $DG(B)$ のゼロ次のコホモロジーとしたもののことである．実は，局所化をする前の $K(B)$ はすでに三角圏の構造を持つが，この状況において，$K(B)$ は **DG 増強** $DG(B)$ **を持つ**という．局所化については説明を省略するが，B が十分良いものであればことがうまく運ばれ，導来圏 $\mathcal{T} = \mathcal{G}(B)$ は $DG(B)$ の適切な充満部分圏による DG 増強を持つ．

一般に三角圏 $\mathcal{T}$ が DG 増強 $\widetilde{\mathcal{T}}$ を持つと，$\mathcal{T}$ の射 $f : X \to Y$ に対し，対応する代表元 $\widetilde{f}$ をとれば $\widetilde{\mathcal{T}}$ における対象と射の列

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{\widetilde{f}} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X) \longrightarrow \cdots$$

であって，これらの射についてコホモロジーをとると $\mathcal{T}$ の完全三角系列となるものを標準的に定めることができる．つまり，上の対象 Z，射 $Y \to Z$，$Z \to T(X)$ は X, Y と $\widetilde{f}$ のみから一意的に決定される*4)．これより，$\mathcal{T}$ の生成系 $\{X_1, X_2, \dots\}$ が存在したとき，これらの対象からなる $\widetilde{\mathcal{T}}$ の充満部分 DG 圏は $\mathcal{T}$ を復元できるのである．三角圏同値を議論する際も，その三角圏が DG 増強を持つ場合はそれぞれの生成系からなる充満部分 DG 圏を比べることが有効な手段となり得ることとなる．

6. A_∞ 圏と A_∞ 増強

今，ホモロジー的ミラー対称性として三角圏同値 $\mathcal{F}(A) \simeq \mathcal{G}(B)$ を議論したいわけであるが，$\mathcal{F}(A)$ のほうは深谷圏と呼ばれる A_∞ 圏の導来圏である．これは三角圏として定義されるが，その構成から保証されているのは DG 増強を持つことではなく，A_∞ 増強を持つことである．三角圏 $\mathcal{F}(A)$ が A_∞ 増強 $\widetilde{\mathcal{F}(A)}$ を持つとは，A_∞ 圏 $\widetilde{\mathcal{F}(A)}$ であって，そのゼロ次のコホモロジーが $\mathcal{F}(A)$ となるものが存在することをいう．A_∞ 圏とは，DG 圏のある自然な拡張として定義される．DG 圏とは，微分 d_{ab}，射の合成 m が性質 (2) を持つような圏のことであったが，今 $d_{ab} = m_1$，$m = m_2$ と書き換えてみよう．m_i は i 個の射を一つの射にうつすものである．A_∞ 圏は，A_∞ 構造 m_i，$i = 1, 2, 3, \dots$，を持つものである．つまり，一般には高次の積 $m_3, m_4, \dots$ が存在し，m_i たちは性質 (2) の拡張である A_∞ 関係式と呼ばれる条件を満たす．A_∞ 関係式は (2) の自然な拡張であるので，DG 圏の場合と同様 A_∞ 圏のコホモロジー，ゼロ次のコホモロジーが圏として定義できることとなる．

実は $\mathcal{F}(A)$ が A_∞ 増強を持つことは $\mathcal{F}(A)$ の定義そのものである．一般の A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ についても，(次数ずらしの自己同型 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を持たない場合はそれを持つように形式的に T^n でずらした対象を付け加えておいて)，$\mathcal{A}$ の射 $\widetilde{f} : X \to Y$ について，対象 Z，射 $Y \to Z$，$Z \to T(X)$ を自然に定めることができ，そうしてできる対象すべてからなる A_∞ 圏 $\langle \mathcal{A} \rangle$ を構成でき，その構成から $\langle \mathcal{A} \rangle$ のゼロ次のコホモロジーは三角圏をなす．$\mathcal{A} = Fuk(A)$ とした場合にそうして得られる三角圏が「$Fuk(A)$ の導来圏」と呼ばれる $\mathcal{F}(A)$ の定義である．これで A, B の両方から三角圏という共通の構造が定義され，A と B の間の圏論的ミラー対称性が議論できるわけである．

DG 圏は A_∞ 圏の特別な場合（高次の積構造が自明な場合）であるので，DG 増強は A_∞ 増強の特別な場合である．三角圏同値 $\mathcal{F}(A) \simeq \mathcal{G}(B)$（が存在するかどうか）を議論するのは途方もなく難しくみえるということであったが，今 $\mathcal{F}(A)$，$\mathcal{G}(B)$ はどちらも A_∞ 増強を持つ．このとき，もし $\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(B)$ がどちらも生成系を持ち，その生成系のなす A_∞ 増強の充満部分 A_∞ 圏をそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ と書いたとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が A_∞ 圏として同値ならば三角圏同値 $\mathcal{F}(A) \simeq \mathcal{G}(B)$ が成り立つ．この事実は，$\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(B)$ の生成系として性質のよいものがとれるときは非常に強力である．特に

*4) Z としては，f の錘と呼ばれるものをとる．

有限個の生成系がとれるならばすばらしい（もちろん $Fuk(A)$ 自体も生成系とはなるが，もっと小さいものをみつけたい）．

7. ホモロジー的ミラー対称性（再）

三角圏 $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{G}(B)$ の生成系のなす A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ であって，A_∞ 圏同値 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ なものをみつけることができれば三角圏同値 $\mathcal{F}(A) \simeq \mathcal{G}(B)$ を示すことができるということまで述べた．では実際，このような生成系をみつけることはできるだろうか？

結論からいうと，$\mathcal{G}(B)$ の生成系としてよいものがみつかる例は多い．またSYZによるミラー対称性のアプローチは，ミラー対 (A, B) を提案するのみならず，B 上の連接層 E と $Fuk(A)$ の対象（つまり A 内のラグランジュ部分多様体）L の間の対応づけに関しても有効であってかなりのことがわかる．これより，多くの場合，まず $\mathcal{G}(B)$ の生成系（のなすDG圏）$\mathcal{B}$ をみつけ，SYZなどから予想される対応する $\mathcal{F}(A)$ の対象をみつけ，それらのなす A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間の A_∞ 同値 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ を構成するという話の流れとなる．これができたとき，$\mathcal{G}(B)$ が $\mathcal{F}(A)$ のある充満部分三角圏と同値となることがいえる．実際，$\mathcal{A}$ の対象が $\mathcal{F}(A)$ の生成系をなすことはまだ示されていないのでこのような部分的結果となるが，これが分かるだけでも大進歩であろう．$\mathcal{F}(A)$ の生成系をさがす話は一般的にはもっと難しいがそれも現在発展中の話題である．$\mathcal{G}(B)$ の生成系については，例えば $\mathbb{CP}^1$，これは球面 S^2 に複素構造が入ったものであるが，この場合 $\mathcal{G}(B)$ の生成系として2個の対象がとれる．その拡張である n 次元複素射影平面 $\mathbb{CP}^n$ の場合は $n+1$ 個の対象からなる生成系が存在する．これらは実多様体としては $2n$ 次元の，ケーラー多様体となるが，カラビ・ヤウ多様体ではないので，ミラー対称性の設定を少し一般化して議論することになるが，このような場合ではよい生成系の存在が知られている例は他にもたくさんある．

ホモロジー的ミラー対称性について今まで（部分的に）分かっていることを羅列するときりがないのでこれでおわりにするが，この問題が明らかに面白いところは，微分幾何学的なシンプレクティック幾何学と，代数幾何学と相性のよい複素幾何学*5)というかなり異なる世界が，ホモロジー代数の言葉によって関係づけられることであろう．このような対称性が予想された1994年から様々な例が議論されてきた．やればやるほど確かにこのようなミステリアスな対称性が本質的なものであると確信できる．このように大筋が安定しているのは，一般に物理的背景，特に位相的場の理論を背景に持つ数学の特徴ではないかと思われるが，例を少し拡張し，それでもミラー対称性が成り立つために設定を少し一般化するなどということを繰り返してきた．このような意味でも生きている数学として，ホモロジー的ミラー対称性にまつわる数学はこれからもさらなる発展を遂げていくにちがいない．

*5) 実際は B として代数多様体そのものが扱われる場合が多く，特に特異点を持ったものなどの扱いに関する拡張まで研究されている．

参考文献

1) M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.1, 2* (Zürich, 1994), volume **184**, pages 120–139. Birkhäuser, 1995. math.AG/9411018.

2) K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies, In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93* (Seoul, 1993).

3) 深谷賢治（編）『ミラー対称性入門』日本評論社, 176pp, 2009.

4) 梶浦宏成『数物系のための圏論—導来圏, 三角圏, A_∞ 圏を中心に』SGC ライブラリ 75, サイエンス社, 216pp, 2010.

ホモロジー的ミラー対称性予想の原論文は 1)，深谷圏と A_∞ 圏の原論文は 2) であり，どちらもウェブ上で手に入る．（ホモロジー的ミラー対称性を含めた）ミラー対称性全般の解説としては 3) などがある．三角圏の生成系，DG 増強，A_∞ 増強についての参考書として 4) がある．

（かじうら・ひろしげ，千葉大学大学院理学研究科）

導来圏と超弦理論

戸田 幸伸

1. はじめに

近年，**導来圏**についての研究が盛んに行われている．導来圏自体はそれほど新しい概念ではなく，1960年代には既に存在していた．しかし，その当時の導来圏の立場としては，コホモロジー論を扱う際の有用な道具という認識しかなかったと思う．現在では，導来圏の構造そのものが興味深い研究対象として認識されている．契機となったのは，1994年の世界数学者会議におけるコンセビッチの**ホモロジカル・ミラー対称性**の提唱[1)]であろう．これにより，導来圏が超弦理論の「**D ブレイン**」を数学的に定式化しているとみなされるようになり，超弦理論が予言する様々な対称性が導来圏を通じて確立されるようになった．つまり，従来までは全く関係ないと思われていた数学の研究分野の間に関係がつくというのである．前述したミラー対称性はその一例であり，これはある種の代数多様体とシンプレクティック多様体の間の理論が等価であることを主張している．このような現象を目の当たりにして，数学者が興奮しないはずはない．

本稿のタイトルは「導来圏と超弦理論」であるが，筆者は数学者なので，超弦理論そのものよりもそこから派生したミラー対称性，導来圏と代数幾何[*1)]の関わりおよび私自身の研究の経緯について述べようと思う．

*1) 多項式系で定義された空間（代数多様体）を研究する学問．

2. 導来圏とは

導来圏の定義等については上原北斗氏が詳しく解説されているので，ここでは簡単に復習することにする．導来圏には「対象」と呼ばれる数学的対象物の集まりと，その間の「射」という概念があり，ある種の公理が満たされている．最も簡単な例は，有限次元複素ベクトル空間の導来圏 $D(\mathbb{C})$ である．この場合，各「対象」は有限次元複素ベクトル空間たち $\{V^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ とその間の線形写像たち

$$V^\bullet = \cdots \to V^0 \xrightarrow{d^0} V^1 \xrightarrow{d^1} V^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \qquad (1)$$

であって，各 i に対して $d^{i+1}\circ d^i = 0$ となるものである．ただし，V^i は高々有限個の i を除いて 0 であるとする（このような $V^\bullet$ を有限複体と呼ぶ）．さらに 2 つの有限複体 $V^\bullet, W^\bullet$ に対し，「射」を与える有限次元複素ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V^\bullet, W^\bullet)$ が対応している．

導来圏の重要な性質に，以下のものがある．

- 各対象 $V^\bullet$ に対し，次数を 1 つずらした別の対象 $V^\bullet[1]$ が存在する．
- 対象たちの間の射の列で「完全三角形」と呼ばれる概念がある．以下の図式が良く用いられる（矢印は対象たちの間の射を表している）．

$$V^\bullet \to W^\bullet \to K^\bullet \to V^\bullet[1]. \qquad (2)$$

後述するように，これらは超弦理論においても意味のある概念となっている．

3. カラビ・ヤウ多様体

超弦理論で興味があるのは，実6次元（複素3次元）の**カラビ・ヤウ多様体**と呼ばれる空間である．我々の住んでいる宇宙は超弦理論においては10次元であると考えられており，通常の縦，横，高さ，時間の4次元を除いた6次元の空間がそのカラビ・ヤウ多様体であると考えられている．この6次元空間は非常に小さく丸まっていて，観測することはできない．しかし，宇宙がそのように多次元の構造を有しているという仮定の下で超弦理論は発展してきた．

カラビ・ヤウ多様体の有名な例として，$\mathbb{C}^4$ 内で以下の方程式で定義された空間がある．

$$x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 1. \tag{3}$$

ここで，x, y, z, w は $\mathbb{C}^4$ の座標である．ただし実際は，上記の空間に無限遠点を付け加える（コンパクト化するという）操作をした空間を扱う必要がある．

方程式 (3) で定義された空間を扱うのは難しい場合が多く，以下の簡略化されたモデルで実験する場合も多い．上と同様に，$\mathbb{C}^4$ 内の次の方程式で定義された空間を考えよう．

$$xy + zw = 0. \tag{4}$$

式 (3) で定義された空間と違って，式 (4) の解空間は原点で特異点を持つ．そこで，今度はコンパクト化する代わりに，原点を除いてそこに実2次元の球面を埋め込む（図1を参照）．でき上がった空間 X は特異点がなく（特異点解消と呼ばれる），式 (3) と同様の幾何的性質を持つことが分かる（局所カラビ・ヤウ多様体と呼ばれる）．しかし，空間の構造としては，実2次元の球面の各点に $\mathbb{C}^2$ が乗っているという非常に簡単なものになっている．局所カラビ・ヤウ多様体上では計算が簡単になる上，興味深い現象も見つかりやすいので，この空間を好む物理学者，数学者は数多いと思う．

4. カラビ・ヤウ多様体の導来圏

X をカラビ・ヤウ多様体とすると，X 上の導来圏 $D(X)$ を定義することができる．この $D(X)$ の対象は，$D(\mathbb{C})$ の対象と同様の有限複体 (1) であるが，各 V^i は今度は有限次元ベクトル空間ではなく，X の各点の上に有限次元ベクトル空間が乗っているような空間となる（ベクトル束と呼ばれる）．この $D(X)$ の「対象」と「射」の概念が，超弦理論におけるカラビ・ヤウ多様体上の「Dブレイン」という概念を数学的に上手く実現していると考えられている．

「Dブレイン」とはカラビ・ヤウ多様体上の1次元の紐の両端が張り付いている膜のようなものである．「膜」なので，カラビ・ヤウ多様体の部分多様体が典型的な例となるが，実はこの部分多様体は自然に導来圏の対象を与えることが分かる．導来圏の対象を与える2つの「膜」の間の射の空間は，両端がこれらの膜に張り付いているような紐の空間を表している．さらにDブレインには，その反ブレイン，タキオン系なる概念が存在するが，それらがそれぞれ導来圏における次数をずらす操作 $V^\bullet \mapsto V^\bullet[1]$ および完全三角形 (2) に対応していると考えられている．

Dブレインを導来圏の対象だと思うことによる利点は，超弦理論に現れるDブレインたちの対称性を数学の言葉に翻訳できることにある．例えば，前述したミラー対称性は以下のように述べられる．実は，Dブレインには2種類のタイプ，A型とB型があって，導来圏に対応するのはB型のほうである．A型には深谷圏と呼ばれる圏が対応していて，これはカラビ・ヤウ多様体のシンプレクティック構造のみで決まる圏である．ミラー対称性は，与えられたカラビ・ヤウ多様体 X に対して，そのミラー多様体 Y が存在して，X の導来圏と Y の深谷圏が同値になることを主張している．導来圏が代数幾何の理論であることを考えると，これは代数幾何とシンプレクティック幾何の理論が等価であるという驚くべき主張である．

5. 極小モデル理論

導来圏の研究の一つの重要な分野に，**極小モデル理論**との関連がある．後述するようにこれも超弦理論やミラー対称性と関わってくるのであるが，しばらくこれらについては忘れて極小モデル理論との関連について述べることにする．

第3節で述べた局所カラビ・ヤウ多様体を考えよう．実は，方程式 (4) の特異点を解消する2次元球面の埋め込みは1通りではなく，2通り存在する．この2通りの空間を X と $X^{\dagger}$ とすると，これらは埋め込まれた2次元球面を除いて同型である（図1を参照）．従って，空間としては似ているのであるが，代数幾何的に厳密な意味で同じ空間であるとはみなされない．しかし，実は導来圏の同値

$$D(X) \xrightarrow{\sim} D(X^{\dagger}) \tag{5}$$

が存在することが知られている．これは，ボンダル・オルロフによる1995年頃の結果である．この事実は，X と $X^{\dagger}$ は空間としては異なるのであるが，導来圏のレベルでは等価になると主張している．上記の操作で X から出発して $X^{\dagger}$ を得る操作は「**フロップ**」と呼ばれる操作の一例である．これは1980年代に大発展した（複素）3次元極小モデル理論において重要な役割を果たす操作である．

極小モデル理論の動機は，代数幾何で扱う空間（代数多様体）を双有理同値類で分類したいということである．「双有理同値」とは，上記の X と $X^{\dagger}$ のように「ほとんど同じ空間」という意味である．この双有理同値類の中で，良い振舞いをする空間（**極小モデル**）を見つけてくるプログラムが極小モデルプログラム（Minimal Model Program，以下MMP）である．

複素1次元の場合，全ての代数多様体は極小モデルであるため，プログラムは自明である．複素2次元の場合，MMP は20世紀初頭にイタリア学派によって完成された．この場合のプログラムは以下のようになる．極小モデルではない複素2次元の代数多様体を取ってくると，その中には「悪い」振舞いをする実2次元（複素1次元）の球面が存在する．これは，自己交点数が -1 となる代数曲線であるため，(-1)-曲線と呼ばれる．この (-1)-曲線を潰すことによって，新しい複素2次元の代数多様体を得る．この操作を続けていくと，いずれ (-1)-曲線はなくなる．

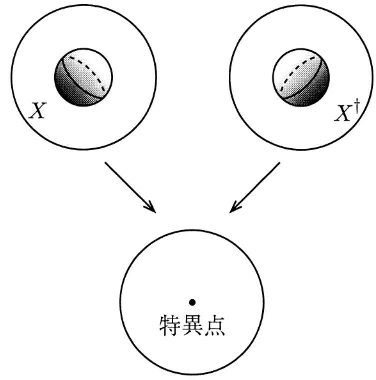


図1　特異点解消とフロップ．

$$X = X_0 \to X_1 \to X_2 \cdots \to X_N. \tag{6}$$

操作が止まる X_N が極小モデルである．複素2次元の場合，極小モデルは一意的であり，さらに小平次元と呼ばれる双有理不変量を用いて分類されることが知られている．

複素3次元の場合は1980年代に森重文氏，川又雄二郎氏らを始めとする多くの人々の努力によって3次元MMPは完成された．3次元の場合，各プロセス (6) は単に曲線を潰す操作ではなく，曲面を潰す操作（因子収縮写像）か，フロップのように曲線を取り除いて別の曲線を埋め込む操作（フリップ）となる．さらに滑らかな代数多様体から出発しても，MMP の各プロセスでは特異点が生じ得る．プログラムの結果得られた極小モデルは必ずしも一意的ではないが，双有理同値な極小モデルはフロップの合成で結ばれることが知られている．

6. 極小モデル理論と導来圏

前節で述べたMMP によって導来圏がどのよう

に振る舞うのかを最初に調べたのが，ボンダル・オルロフである．2次元の場合には答えは簡単である．$f\colon X \to Y$ を (-1)-曲線 C を潰す写像であるとすると，導来圏は以下の準直交分解を持つ．

$$D(X) = \langle \mathcal{O}_C(-1), D(Y) \rangle.$$

準直交分解や上の記号については詳しく説明しないが，要するに $D(Y)$ は $D(X)$ より「小さい」ということである．よって，MMP は導来圏を小さくしていく操作であると考えられる．3次元の場合でも，曲面を潰す因子収縮写像 $f\colon X \to Y$ で，Y に特異点が存在しない場合には同様の準直交分解が存在することがボンダル・オルロフによって示されている．

興味深いのは極小モデルの場合である．局所カラビ・ヤウの場合に述べた導来圏の同値 (5) は，全ての特異点がない3次元代数多様体の間のフロップに対しても成立することがブリッジランドによって示された．2000年頃の結果である．これにより，双有理同値な特異点がない3次元極小モデルの導来圏は同値になることが分かる．例えばカラビ・ヤウ多様体は極小モデルであるため，双有理同値な3次元カラビ・ヤウ多様体の導来圏は同値になる．

上で述べた現象により，MMP により導来圏は小さくなり，MMP の終着点の極小モデルの導来圏は (極小モデル自体は一意的ではないが) 一意的になると考えられる．この現象を厳密に確立することができれば，MMP のより自然な理解，および MMP の未解決問題への応用すら期待できる．

しかしながら，前節で述べたように3次元 MMP の過程では特異点が生じ得る．特異点を持った代数多様体の導来圏はあまり良い振舞いをせず，上記のように導来圏が小さくなるという現象も存在しない．そこで，特異点を持った代数多様体に対しては $D(X)$ をより「良い」圏に置き換えて議論すると良いと考えられている．この「良い」圏の定義，構成についてはまだ明確な答えは存在しないが，例えば川又雄二郎氏によって研究が進められている．

7. 私が導来圏の研究を志した経緯

前節で極小モデル理論と導来圏の関わりについて述べたのは，この関係をより深く発展させたいというのが私の導来圏研究の出発点だったからである．私は2001年に東大の大学院の入学試験を終え，今後大学院では3次元 MMP の高次元化を目指すか，それとも異なる方向でアプローチするべきか，と考えていた．とりあえず何の当てもなくハーツホーンの『Residues and Duality』という本を読んで，導来圏について勉強はしていたのであるが，その当時は導来圏について抽象的で単なる技術的な道具という印象しか抱いていなかったと思う．その折，2001年の冬にブリッジランドが東大を訪れ，3次元フロップと導来圏が関係するという，前節で述べた鮮やかな結果について講演されていた．当時は細部については理解できなかったが，3次元 MMP と導来圏という，当時勉強中であり，なおかつ一見関係なさそうだった数学的対象に関係が付くということは何となく分かり，大変感銘を受けた記憶がある．それだけではなく3次元フロップを，特異点の分類理論を用いることなく概念的に構築していたのは大変印象的であった（その当時は，3次元フロップを構成するには曲線を潰した先の特異点を分類することが必要だった）．彼の講演を聞いたのが，私が導来圏の研究を志したきっかけであった．

修士過程ではブリッジランドの3次元フロップの導来圏による構成，および導来同値を高次元に拡張するという方向で研究していたが，すぐに行き詰まってしまった．彼の証明のアイデアは，導来圏内に「偏屈層」からなる部分圏を導入して，この「偏屈層」たち全体の空間としてフロップを構成するというものであった．高次元ではこの偏屈層が上手く定義できず，議論が進められないのである．

結局，修士過程では極小モデル理論と導来圏についての結果を出すことはできなかったが，導来圏が同値になる代数多様体（フーリエ・向井パートナーと呼ばれる）を分類する一つのアイデアを

出すことができ，実際に小平次元が 2 となる 3 次元代数多様体のフーリエ・向井パートナーを決定することができた．その後，博士課程 1 年目では導来圏と変形理論との関係について調べていたりしたが，前述の MMP と関わる研究をしたのは博士 2 年目になってからである．これについては，次節で述べる．

8. 導来圏の安定性条件

博士課程 2 年目の 2005 年 9 月から 12 月にかけて，私は当時イギリスのシェフィールド大学に勤めていたブリッジランド氏を訪ねて，彼と直接議論をする機会を得ることができた．その 2, 3 年前に彼は**「導来圏の安定性条件」**の理論を提唱しており，私もその理論に興味を持っていた．しかし，当時は安定性条件の理論の重要さは（現在ほどには）理解されておらず，この理論の研究者も彼を含めて数人だったと思う．

導来圏の安定性条件とは，大雑把に言うと導来圏の対象のうち「(半) 安定」な対象を定めるデータのことである．古典的にはベクトル束の (半) 安定性という概念が存在していて，様々な理由で（半）安定なベクトル束を考えると都合が良いことは知られていた（モジュライが構成しやすい，良い接続が入る等々）．この古典的な概念を導来圏の対象に拡張したのがブリッジランドの仕事である．

この安定性条件の概念は，実はミラー対称性と深く関係している．2 つのカラビ・ヤウ多様体 X と Y が互いにミラーの関係にあるとしよう．このとき，X のシンプレクティック構造の小変形を与えることは，Y の複素構造の小変形を与えることと等価になる．一方，Y のほうで大域的な複素構造の変形空間（モジュライ空間）を考えた場合，対応する X のシンプレクティック構造の大域的な変形空間が導来圏の安定性条件の空間であると考えられている．

ここで安定性条件の「空間」と書いたのは，実は導来圏の安定性条件全体には複素多様体の構造が入るのである．これはブリッジランドの原論文の主定理である．安定性条件の空間を記述して，それをミラー多様体の複素構造のモジュライ空間と比較することは，ミラー対称性の研究において非常に重要な問題であると当時から認識されていた．しかし，安定性条件と MMP の関連性については当時は調べられていなかった．

9. イギリスでの研究

イギリスのシェフィールドに到着した私は宿泊先からブリッジランドのオフィスに電話をかけ，到着した旨を伝えた．恐縮にも彼は私の宿泊先まで来てくれ，その後シェフィールド大学まで彼と議論しながら歩いていた．その際，私が何気なく「解空間 (4) の特異点解消 X の導来圏の安定性条件の空間はどのようになるか？」と尋ねたところ，「その問題は面白いから，君にあげるよ」という答えを頂き，それをきっかけとしてイギリスでは安定性条件の空間を研究することとなった．

上記の問題について，いろいろとアドバイスを頂いたりもして，わりとすぐに安定性条件の空間の構造は把握できた．答えは，安定性条件の空間を自己同値群の作用で割ると，実 2 次元球面から 3 点を除いたものになる（図 2 を参照）．この 2 次元球面の上半平面は，与えられた X のシンプレクティック構造から定まる安定性条件の空間である．一方，下半平面は X のフロップ $X^{\dagger}$ のシンプレクティック構造から定まる安定性条件を，導来圏の同値 (5) を通じて X の安定性条件とみなしたものである．赤道に対応する部分は，実はある種の非可換代数に付随する安定性条件となっている．この非可換代数の加群の圏が，前述した「偏屈層」

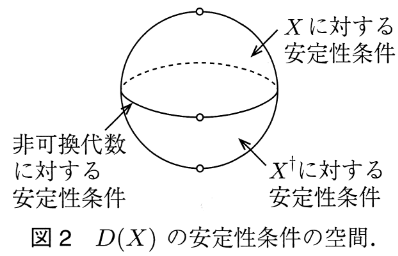


図 2 $D(X)$ の安定性条件の空間．

の圏と同値になっているのである．興味深いことに，安定性条件の空間を記述するには X のデータのみでは不十分で，導来同値を与えるフロップ $X^{\dagger}$ や，非可換代数といった従来の幾何では捕えられない数学的対象も考慮にいれる必要がある．

上で述べた研究を通じて，出発点だったフロップと導来圏との関係が安定性条件を通じて明確に見えるようになったのは私にとって意義深かった．さらに安定性条件の空間が超弦理論やミラー対称性と関わることから，フロップとこれらの理論との関わりも明らかとなった．導来圏を研究することで様々な分野の数学との接点が見つかるのがこの研究分野の大きな醍醐味であると思う．先ほどの解空間 (4) の特異点解消の導来圏を研究するだけでも，MMP，非可換代数，超弦理論，ミラー対称性といったキーワードが絡んでくるのである．

10. その後の発展

ここ数年は導来圏，およびその上の安定性条件をドナルドソン・トーマス（DT）不変量の研究に応用するという方向で大きな進展があった．DT 不変量とは 1998 年頃にトーマスの学位論文で発表された不変量であり，3 次元カラビ・ヤウ多様体上の安定なベクトル束（連接層）を数え上げる理論である．連接層の階数が 1 である理論に限定して考えると，これはカラビ・ヤウ多様体上の曲線を数え上げており，グロモフ・ウィッテン不変量と呼ばれる別の曲線の数え上げ理論と等価であると予想されている．DT 不変量は超弦理論における「BPS 状態の数え上げ」に対応しており，物理学者も興味を持って研究している最近流行のトピックである．

DT 理論において安定な連接層を考える代わりに，ブリッジランドの安定性条件において安定な導来圏の対象を考え，それらの数え上げ不変量を構築するというのは自然な考えである．しかしながら今のところ，ブリッジランドの安定性条件に付随する様々な技術的な課題が克服できていないため，上記の意味での導来圏の対象の数え上げ理論は未だ未完成である．例えば 5 次曲面 (3) 上にブリッジランドの安定性条件が存在するかどうかすら知られていない．この問題については昨年私はバイエル氏，マクリ氏らと共同で安定性条件を与えるであろうデータの候補を提唱したが，それが実際に安定性条件を与えることを示すのは極めて困難であると思う．

その一方で，解空間 (4) の特異点解消 X 上の安定性条件を構成することは非常に簡単であり，実際に前節にてその空間の構造について述べた．この場合は導来圏の安定対象を数え上げる DT 型の不変量を構築することができ，さらに安定性条件を変えたときに不変量がどのように振る舞うかも調べることができる．これについて詳細に調べたのが 2009 年の長尾健太郎氏と中島啓氏の共同研究である．彼らは上記のアイデアに基づいて，X 上の DT 不変量，そのフロップ $X^{\dagger}$ 上の DT 不変量，さらに非可換代数の表現を数え上げる非可換 DT 不変量の間の関係を記述することに成功した．導来圏を用いることで幾何学への応用を見出した，着目すべき結果である．

上記のように安定性条件を変えたときの DT 型不変量の振舞いは「壁越え現象」と呼ばれる．つまり，安定性条件の空間には壁が存在して，壁を越えるごとに不変量がジャンプするのである．壁越え現象による DT 不変量の振舞いを記述する一般論はジョイス・ソン，コンセビッチ・ソイベルマンらによって確立された．これらを用いて DT 不変量の壁越え理論は近年さらに進展している．これについても述べたいことがたくさんあるが，ページ数の関係上ここで筆を置くことにする．

参考文献

1) M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry*, Vol.1 of *Proceedings of ICM*. Basel: Birkhäuser, 1995.

（とだ・ゆきのぶ，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

名著に親しむ
——特集から広がる読書案内——

川口　周

代数，圏の本から

私はこの3月まで本特集の巻頭言を書かれている高橋篤史さんの同僚で，その縁でこの読書案内をさせてもらうことになった．私の研究テーマは，主に数論的な代数幾何で，私自身は導来圏を研究に用いたことはないが，代数幾何や近い分野のセミナーなどで，導来圏や三角圏などを用いて代数多様体の深い性質を導く講演があり（本特集はそのような話題の宝庫と思う），導来圏や三角圏の偉力を感じる．ここでは，私の知っている本の中から，代数，圏の本を紹介したい．

代数では，数学的対象のもつ演算や作用を共通の構造として取り出して考える．圏では，対象だけでなく，二つの対象の間の関係（射）に注目し，対象と射を共通の構造として取り出して考える．代数や圏を（否定的な意味で）抽象的に感じる人は多いかもしれない．

しかし，物事を抽象的に捉えることで，何が本質的かが浮き上がってくることもあると思われる．例えば群は，一つの演算をもつ代数系である．ひとたび群が定義されてしまえば，何らかの対象の対称性全体を考えるとき，群が（例えば結晶点群のように）自然に現れていることが分かる．しかし，原田耕一郎『群の発見』（岩波書店）によれば，群という考え方に初めて芽が出たのは，1770年にLagrangeが多項式の根の対称性（根の置き換え）を考えたときだったという．そして，群論の創始者とも呼ばれるGaloisは，多項式に対して根の置換の群を考え，その群が特別な性質をもつことが根号による根の公式の存在と同値であることを示した．

さて，このような代数的な見方は，線形代数のベクトル空間の理論で初めて意識することが多いだろうか．私はといえば，数ベクトルや行列の演算から入る佐武一郎『線型代数学』（裳華房）で線形代数を学んだこともあって，このような見方を意識したのは，線形代数よりはむしろ自主ゼミで読んだ本だったと思う．大学に入って，数学に興味のある同級生と自主ゼミをしていて，森田康夫『代数概論』という代数系の入門書を読んだ．私には，例えば，定義だけみると群は簡単な構造しかないように思えるのに，本では，群のもつ様々な性質が次々と示されていくのが面白かった．

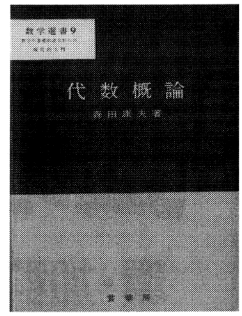
私は代数幾何をしたくて，大学のセミナーでは，丸山正樹先生のもとでMumford『Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties』(Springer-Verlag) を読んだ．代数幾何では，可換環と環上の加群を非常によく用いる．たしかセミナーのときに可換環の本が話題になったことがあって，そのときに丸山先生は，松村英之『Commutative Ring Theory』(Cambridge University Press) と『Commutative Algebra』(Benjamin-Cummings Pub. Co.)（どちらかというと後者の本）を勧められていたように思う．私は，セミナーの前から前者の本をある程度読んでいたこともあって，可換環論は前者の本で主に学んだ．

個人的なことをもう少し書かせてもらうと，私は大学院生のときに，代数的スタックの学習会を兼ねた研究集会に参加したこともあったのだが，あまり理解できなかった．代数的スタックや導来圏についてもう少し学んだのは，助手のときだった．一時期，代数幾何関連の同年代から少し若い人たちが学習会のような形でいくつかの論文を読んだときがあって，それに参加させてもらった．そのときの論文に，向井茂 "Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves" があった．このときに，「代数的空間だとArtinのイェール大学のモノグラフがまとまっていていいよ，導来圏だとGelfand–Manin『Methods of Homological Algebra』(Springer-Verlag) がいいよ（ただし，誤植が多いけどね）」と教えてもらった．

以上，いくつかの本を挙げてきた．この文章の読者は理工系の方が多いと思うので，高校での数学から，大学での微分積分学，線形代数そしてその先へと積み重ねてこられた方が多いと思う．数学は積み重ねというのはたしかにそうだと思う．一方で，ある程度の基礎が固まったら，こんなことがしてみたいと思ったところから，逆算していくのもいいかもしれないと思う．

（かわぐち・しゅう，京都大学大学院理学研究科）

代数概論



森田康夫著，A5 判，298 ページ，本体 4300 円，裳華房，1987 年

代数系の入門書で，群，環と加群，体の基礎的な事柄の他に，ホモロジー代数や圏と関手の解説もされている．コンパクトにまとまった本だと思う．代数系の入門書は他にも良書が多く出版されている．例えば，最近出版された，雪江明彦『代数学』（日本評論社）は，1，2 巻に群，環，体とガロア理論が書かれ，3 巻に代数の魅力的な話題がいくつも取り上げられていて，とても良い本に見える．

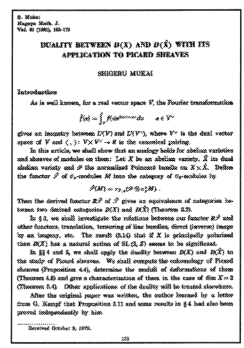
可換環論



松村英之著，A5 判，復刊版，384 ページ，本体 5700 円，共立出版，2000 年

代数幾何を学ぼうとすると，（学部の講義で通常扱われる以上の）可換環論が必要になってくる．この本はそういうときに役立つと思う．ホモロジー代数的な扱いはやや少ないかもしれない．この本の英語の翻訳版が，左頁に挙げた『Commutative Ring Theory』である．なお，最近，可換環論の泰斗による後藤四郎・渡辺敬一『可換環論』（日本評論社）という本格的な可換環論の本が出版された．

Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves


S. Mukai
Nagoya Math. J.
Vol. 81 (1981), 153–175

DUALITY BETWEEN $D(X)$ AND $D(\hat{X})$ WITH ITS APPLICATION TO PICARD SHEAVES

SHIGERU MUKAI

Introduction

As is well known, for a real vector space V, the Fourier transformation

$$\hat{f}(\alpha) = \int_V f(x) e^{2\pi i \langle x, \alpha \rangle} dx \qquad \alpha \in V^\vee$$

gives an isometry between $L^2(V)$ and $L^2(V^\vee)$, where $V^\vee$ is the dual vector space of V and $\langle\ ,\ \rangle: V \times V^\vee \to R$ is the canonical pairing.

In this article, we shall show that an analogy holds for abelian varieties and sheaves of modules on them: Let X be an abelian variety, $\hat{X}$ its dual abelian variety and $\mathscr{P}$ the normalized Poincaré bundle on $X \times \hat{X}$. Define the functor $\mathscr{S}$ of $\mathcal{O}_X$-modules M into the category of $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-modules by

$$\mathscr{S}(M) = \pi_{\hat{X},*}(\mathscr{P} \otimes \pi_X^* M).$$

Then the derived functor $R\mathscr{S}$ of $\mathscr{S}$ gives an equivalence of categories between two derived categories $D(X)$ and $D(\hat{X})$ (Theorem 2.2).

In § 3, we shall investigate the relations between our functor $R\mathscr{S}$ and other functors, translation, tensoring of line bundles, direct (inverse) image by an isogeny, etc. The result (3.14) that if X is principally polarized then $D(X)$ has a natural action of $SL(2, Z)$ seems to be significant.

In §§ 4 and 5, we shall apply the duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ to the study of Picard sheaves. We shall compute the cohomology of Picard sheaves (Proposition 4.4), determine the moduli of deformations of them (Theorem 4.8) and give a characterization of them in the case of dim $X = 2$ (Theorem 5.4). Other applications of the duality will be treated elsewhere.

After the original paper was written, the author learned by a letter from G. Kempf that Proposition 3.11 and some results in § 4 had also been proved independently by him.

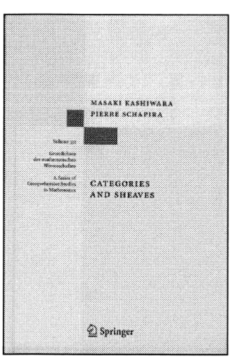
Received October 9, 1979.

153

Shigeru Mukai 著，Nagoya Mathematical Journal 81 (1981), 153–175.

左頁でも少し述べたように，本でなくて論文である．フーリエ・向井変換（と後によばれる変換）がアーベル多様体 X の $\mathcal{O}_X$-加群の導来圏 $D(X)$ とその双対アーベル多様体 $\hat{X}$ の $\mathcal{O}_X$-加群の導来圏 $D(\hat{X})$ の圏同値を導くことが示されている．後に大きく発展する研究（ミラー対称性とも関わっているようだ）の原点となる有名な論文である．こういうことを思いついて証明するとは，ただただすごいと思った．なお，この論文は http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.nmj/1118786312 より無料でダウンロードできる．

Categories and Sheaves



Masaki Kashiwara and Pierre Schapira 著，497 ページ，Springer-Verlag, 2006

高橋篤史さんのお勧めの本．高橋さんのところで学んだある学生は，学部 4 年生のセミナーで岩永恭雄・佐藤眞久『環と加群のホモロジー代数的理論』（日本評論社）を，修士 1 年生のセミナーでこの本の最初の部分を読んで，行列因子化の圏についての修士論文を書いた．また，高橋さん自身により，ホモロジー代数や圏論の解説もある『弦理論の代数的基礎』（サイエンス社）という本が最近出版された．

リーマン予想の数理物理

ゼータ関数と分配関数



黒川信重・小山信也共著，B5 判，144 頁，本体 2190 円，サイエンス社

本書はゼータ関数と分配関数を対比させつつ解説することに主眼をおき，さらにリーマン予想への物理的視点によるアプローチの展望，およびそこから生まれた新たな方向性を解説したものである．

リーマン・ゼータ関数とは，すべての自然数について足しあわせた級数とその解析接続によって定義される有理型関数であり，素数分布について本質的な情報を含んでいる．特にその精度の情報は非自明な零点に集約されている．そしてリーマン予想とは，この非自明な零点は，すべて実部が $\frac{1}{2}$ の直線上に存在するというものであり，150 年余にわたって未解決のまま残されている数学における最大の難問である．現在ではゼータ関数の概念は広がり，多種多様なゼータ関数が発見され続けている．また多くのゼータ関数に関してそれぞれリーマン予想の類似があり，その解決は理論の飛躍的前進に結びつくのである．

一方，微視的法則から巨視的法則を導出する学問である統計物理学において，最も重要な役割を果たすのが分配関数である．分配関数は系のすべての状態を足しあわせたものであり，この関数からあらゆる物理量を紡ぎ出すことができる．現在では物性理論や素粒子論にとどまらず広く数学においても活躍している．

このようにゼータ関数と分配関数という 2 つの大きなテーマは，それぞれの分野を越え，多大な影響を与え続けている．両者は生まれは違うが非常によく似た思想の上に成り立っており，それがいつか出会うということは必然なのかもしれない．

本書はこの重なった領域に焦点を当て，互いに影響を及ぼしあっているいくつかの場面を紹介している．実質的内容の最初の章である 2 章では素数とリーマン・ゼータ関数の零点に関する歴史，および素数定理について述べている．素数定理とは与えられた x までの素数の個数がほぼその対数積分で与えられる，というものである．この証明自体にはリーマン・ゼータ関数の零点は実部が 1 の直線上にない，という事実で十分なのであるが，その精度を支配しているのが非自明な零点の分布なのである．リーマン予想の成立は素数は最も統制された状態にあるということを意味する．

このようにリーマン・ゼータ関数の零点分布は素数分布の本質に迫る上で非常に重要な役割を果たしているのだが，一方リーとヤンは分配関数における零点分布について以下のことを発見した．すなわち，系の相転移点が分配関数の零点の熱力学的極限における挙動によって記述されること，および，かなり広いクラスの強磁性体や格子気体の分配関数に関し，すべての零点が単位円周上にあるということである．変数変換を行うと零点は実部が一定である直線上にあることを意味し，ゼータ関数と分配関数の関連を示唆していると言える．3 章はこの理論の零点に関する部分を解説したものである．

ボストとコンヌは積極的に類似性を追究し，分配関数がリーマン・ゼータ関数と一致する系をヘッケ代数による C^*-環から構成することによって研究の新たな方向性を切り開いた．この系はある温度で相転移を起こし，低温での各純粋相に有理数体の最大アーベル拡大のガロア群が自由かつ推移的に作用する．4 章はこの内容と虚二次体への拡張の解説である．

5 章はウィッテン・ゼータ関数という新種のゼータ関数についての解説である．ウィッテンは二次元量子ゲージ理論の研究に際し，その分配関数の極限がリー群の有限次元既約表現の次元に関するディリクレ級数となることを見出した．$SU(2)$ の場合，ちょうどリーマン・ゼータ関数と一致する．したがってウィッテン・ゼータ関数はリーマン・ゼータ関数の自然な多重類似を与えている．

6 章ではゼータ関数や分配関数の持つ対称性と保型性について概観し，7 章で今後の展望といくつかの問題が例示される形で本書は終わる．

本書の最後にもあるようにゼータ関数と分配関数の結びつきから生まれた研究は，まだ始まったばかりである．章によっては高度な予備知識が必要であり，通読は難しいかもしれないが，現在ある研究の動向や新たな発展性を知る上で本書は良い導入となるであろう．

小森　靖（立教大学理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

岡太 彬訓

1982年8月号

1964年にJoe Kruskalが，現在の多次元尺度構成法（**M**ulti**D**imensional **S**caling: MDS）の基本になる従来に比べ明快な概念と制約の少ない画期的なアルゴリズムを発表した．1969年に印東太郎先生（故人，慶應義塾大学およびUC Irvine名誉教授）が米国より，KruskalのMDSのFORTRANで書かれたプログラム（M-D-SCAL）を携えて帰国され，大学院生であった筆者はこれをIBM 7040に移殖した．1975年に日・米の代表者を印東先生とDoug Carrollとして，MDSに関する日米セミナーがSan Diegoで開かれ，筆者も参加し，その後MDSで重要な貢献を果たす研究者と直接知り合うことができた．

30年前の1982年は，単相2元データ（相関行列のように行と列が同じ変数や対象に対応するデータ）だけでなく，多様な形式のデータを扱うMDSが発表された時期であり，現在の発展へ続いている．アルゴリズムでは，最尤法やベイズ推定などを用いるなどの発展がみられる．MDSは心理学と考古学で利用が始まったが，現在では様々な分野で使われている．また，MDSの研究では，非対称関係を分析するためのMDSの開発が（特に我国では）盛んである（例えば，*Behaviormetrika*, (2012), vol.**39**(1) の非対称MDSの特集を参照）．

MDSは，〈似ている/似ていない〉，〈近い/遠い〉の関係を多次元空間の距離で表現する．結果のわかりやすさと利用しやすさがMDSの長所であり，この長所を活かした理論やモデルの発展，アルゴリズムおよび使いやすいプログラムの開発が望まれる．単相2元データの場合，MDSは対角要素を分析から除くことが多かった．対角要素は，例えば，ブランド変更行列であればブランドを変更しないことに対応し，分析から除くのは不自然である．対角要素を含めたモデルの構成が望まれる．社会ネットワークとの関係，MDSとクラスター分析法を組み合わせたハイブリッドモデル，また，変数，個人，実験条件（時点）などのより複雑な組合せから構成されるデータなど，より多様な形式のデータへの対応など今後の課題である．最後に，これからMDSを扱ってみたいという読者のために，全般的なMDSの知識が得られる文献としてBorg & Groenen (2005)[1] を挙げる．



参考文献

1) Borg, I., & Groenen, P.J.F., *Modern multidimensional scaling: Theory and applications* (2nd ed.), New York: Springer (2005).

（おかだ・あきのり，多摩大学大学院経営情報学研究科）

大学院入試問題からみた 大学の数学

第1回 数学のより深い理解を目指す

線形代数1

行列の対角化

海老原 円・太田 雅人

1.1 まえがき——大学院入試問題を通して数学の理解を深めよう

この連載は，理工系の大学院入試試験に出題された数学の問題を題材として，それを実際に解きつつ，大学の数学をより深く理解していただこうというものである．ひと口に理工系の大学院といっても，その数は非常に多い．当然のことながら，出題された問題も多岐にわたる．ここでは，その中から重要かつ標準的な問題をピックアップして考察しようと思う．

実際に大学院の受験を考えている読者にはもちろん読んでいただきたいが，そうでない読者——例えばすでに大学院を修了されている方——にも是非読んでいただいて，もう一度みずからの「数学」をブラッシュアップしていただきたいと考えている．

1.2 まずは対角化の問題から

連載第1回のテーマは「線形代数」である．その中の行列の対角化の問題，固有値と固有ベクトルの問題を取り上げる．まず，次の問題を考えてみよう．

問題 1.1 （大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻，平成 21 年度） 次の行列 A に関する以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 行列の固有値および各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と $(P^{-1}AP)^n$ を求めよ．さらに，A^n を求めよ．

解答例　(1) 行列 A の特性多項式（固有多項式）$\varPhi_A(t) := \det(tE_3 - A)$ を計算すると

$$\varPhi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)t(t+1)$$

となるので，A の固有値は $1, 0, -1$ の 3 つである．ここで E_3 は 3 次の単位行列を表す．

固有値 1 に対する A の固有ベクトルを求めるために

$$(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right),$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと $x = z, y = 0$ が得られるので，固有値 1 に対する固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \neq 0)$ の形であることが分かる．

次に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと $x = -2y$, $z = 0$ が得られるので，固有値 0 に対する固有ベクトルは $c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c_2 \neq 0)$ の形である．

さらに $(A + E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，すなわち $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと $x = -y$, $z = 0$ が得られるので，固有値 -1 に対する固有ベクトルは $c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c_3 \neq 0)$ の形である．

(2) $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．これらはそれぞれ固有値 $1, 0, -1$ に対する固有ベクトルである．さらにこれらを列ベクトルとしてもつ正方行列を P とする：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

相異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立（1 次独立）であるので，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は線形独立であり，したがって，これらを列ベクトルにもつ正方行列 P は正則行列で

ある．さらに $B = P^{-1}AP$ とおけば，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．このとき，

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

である．また

$$B^n = P^{-1}A^nP \tag{1.2}$$

が成り立つ．実際，$n = 1$ のとき，等式 (1.2) は成り立つ．$n - 1$ に対して等式 (1.2) が成り立つと仮定すると

$$B^n = B^{n-1}B = P^{-1}A^{n-1}PP^{-1}AP = P^{-1}A^{n-1}AP^{-1} = P^{-1}A^nP$$

となるので，任意の自然数 n に対して等式 (1.2) が成り立つことが帰納的に示される．

等式 (1.2) の両辺に左から P を，右から P^{-1} をかけると

$$A^n = PB^nP^{-1} \tag{1.3}$$

が得られる．P の逆行列 P^{-1} を計算すると $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ であるので，

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 2\cdot(-1)^{n+1} & 1+(-1)^n \\ (-1)^n & 2\cdot(-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

が得られる．　　　　**解答終わり**

最初に取り上げたのは，いわゆる**対角化**の問題である．これは**超頻出問題**であるので，受験生としては確実におさえておきたい問題である．

まず m 次正方行列 A の対角化の問題を解く手続きをまとめておこう（ここで m は自然数とする）．

(a) 特性方程式（固有方程式）$\Phi_A(t) = 0$ の根を求めれば，それが A の固有値である．

(b) 固有値 α が求まったら，連立 1 次方程式 $(A - \alpha E_m)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の $\boldsymbol{0}$ でない解を求めれば，それが固有値 α に対する A の固有ベクトルである．

(c) m 個の**線形独立**（**1 次独立**）な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ をとることができれば，それらを列ベクトルとしてもつ正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_m)$ は正則行列になり，$P^{-1}AP$ は A の固有値を対角成分とする対角行列になる．m 個の線形独立な固有ベクトルが存在しない場合は，A は対角化不可能である．

技術的には，上の手続き (a) において特性方程式を求める際に，**行列式の計算**が必要になる．問題 1.1 の解答例では行列式の計算過程を省略しているが，行列式については機会をあらためて別箇に取り扱うことにしよう．

行列 A が対角化できると，それを利用して A のべき乗 A^n が計算できる．上の問題でもそれを問うている．この場合，行列 P の**逆行列を求める**ことが必要になってくる．解答例では，逆行列の計算過程も省略している．これもまたのちほど別箇に取り上げよう．

ところで，問題文には「$(P^{-1}AP)^n$ を求めよ」，あるいは「A^n を求めよ」とあるのみであるが，ここは常識的に，n が自然数であるものと解釈した．$n=0$ とすると $A^n\,(=A^0)$ は単位行列であるが，解答例にある A^n の計算結果に $n=0$ を代入しても単位行列にはならない（なぜこのようなことが起きるのであろうか？ それは読者に対する**クイズ**としておこう）．

A^n の計算結果であるが，次のように答えることもできる．

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (n\ \text{が奇数のとき}), \\[2ex] \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (n\ \text{が偶数のとき}). \end{cases}$$

実は，この問題の場合，A^n を求めるだけなら A^2 と A^3 を計算した段階で $A^3=A$ に気づくので，あとは帰納的に A^n が求まる．一般に，$\{1,\,0,\,-1\}$ を固有値として持つ 3 次正方行列は必ず $A^3=A$ を満たすので，A^n は A と一致するか（n が奇数のとき），A^2 と一致するか（n が偶数のとき）のいずれかである（このことを確かめるのは，読者の演習問題とする）．

さて，受験生の立場からすると，この種の問題はミスなく計算することが何よりも大切である．そこで，検算の仕方について少しコメントしておこう．一般に，自分の解答をそのままなぞる形で検算してもその効果は薄い．無意識のうちに，せっかく書いた自分の解答を変えたくないという気持ちがはたらくからである．検算は，解答とは別の方法で，しかもなるべく短時間に済ませることがのぞましい．

問題 1.1 を解く際には，まず特性多項式 $\Phi_A(t)$ を正確に計算することが最初のステップである．$\Phi_A(t)$ がうまく因数分解できない場合は，どこかで計算ミスをしている可能性が高いので，もう一度 $\Phi_A(t)$ を慎重に計算し直す必要がある．そうなると時間のロスや心理的なダメージが大きい．最初から細心の注意を払って，計算の小さなステップごとに確認作業を怠らず，ここは何としても**一回で正確に計算する**べきである．

固有値が求まったら，固有ベクトルの計算までは一気に進んでよいであろう．固有値 α とそれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が求まったら，次のステップに進む前に，$A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ が実際に成り立つことを検算しておく．そのことが確認されれば，そこまでの計算は順調にきているとみてよい．

問題 1.1 (2) については，まず P の逆行列 P^{-1} を計算した時点で，PP^{-1} を計算して，それが単位行列になることを確認しておきたい．この場合，$P^{-1}P$ を計算してもよいのであるが，そのあとで PB^nP^{-1} を計算することになるので，その順序にあわせて，あらかじめ PP^{-1} を計算しておくと，双方の計算には共通点があることから，A^n を計算する際の心理的ストレスを多少なりとも減らすことができる．

さらに，最終的に A^n が求まった段階で，少なくとも，得られた結果に $n=1$ を代入したときに，問題文内で与えられた A と一致していることは確認すべきである．さらに時間の余裕があるならば，A^n の計算結果にさらに A をかけてみて，その結果が自分の解答の n のところに $n+1$ を代入したものと一致していることを確認するとよい．ここまで確認できれば A^n の計算は正しい．

問題文の問いかけとその答え方に関しても言及しておこう．一般に，「ある性質を満たすものを求めよ」という問題文は，「その性質を満たすものを**すべて**求めよ」という意味に解釈するのが普通であるが，小問 (2) では「$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P」を**一つだけ**答えている．なぜそうするのかと問われると，いささか返答に苦しむのであるが，ここでは，$P^{-1}AP$ が対角行列になるという事実そのものが重要なのであって，文脈上，そのような P をすべて求める必然性はないと考えるのが普通であろう——これは暗黙の了解事項である．大学入試と違って，大学院の入学試験は，ある程度共通の土俵にいる受験生を対象にしていることから，狭いコミュニティー内でのそのような暗黙の了解を前提にした出題が少なくない．

しかし，そうはいっても，出題者としては受験生になるべく余計な不安を与えないようにしたい．**解答者が何をどこまで答えるべきかを問題文の中で明確にしておくことは，公正な試験を行うための大前提である**ので，例えば対角化の問題においても，無粋であることは承知の上で，「$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を**一つ**求めよ」という問題文にしてみたりするなど，出題者はいろいろと苦労するものである．

1.3 手続きとしての解法を超えて

今回は初回ということもあって，いろいろなことを述べているうちにかなり誌面を費やしてしまった．次の問題に移ろう．

問題 1.2　(東京大学大学院新領域創成科学研究科情報生命科学専攻，平成 20 年度：一部抜粋・改題)　n 次正方行列 A について，次の問いに答えよ．

(1)　$A^2=A$ が成り立つならば，A の固有値は 0 または 1 であることを示せ．

(2)　A が固有値 0 を持つならば，A は逆行列を持たないことを示せ．

解答例　(1) λ を A の固有値とすると，$\mathbf{0}$ でない n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ であって $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすものが存在する．このとき

$$\lambda\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{x}=A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$$

より $(\lambda-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が得られるが，$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ より $\lambda-\lambda^2=0$ である．したがって，

$\lambda=0$ または 1 である．

(2) A が固有値 0 を持つならば，$\mathbf{0}$ でない n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ であって

$$A\boldsymbol{y}=\mathbf{0} \tag{1.5}$$

を満たすものが存在する．A が逆行列を持つならば，この式 (1.5) の両辺に左から A^{-1} をかければ $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ が得られるが，これは $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$ であることに矛盾する．したがって，A は逆行列を持たない． **解答終わり**

固有値の定義が分かっていれば解ける問題である．ところが，実際に口頭試問などで受験生に質問してみると，固有値と固有ベクトルの定義が正確にいえる者は案外少ない．

「正方行列 A の固有値の定義は何ですか」と問うと，「特性方程式 $\Phi_A(t)=0$ の根です」という答えが返ってくることがあるが，これは（かなり善意に解釈したとしても）「定義」とはいい難い．このような受験生は，しかし，おうおうにして，問題 1.1 のような対角化の問題をすらすら解くことができる．これは，その受験生が，対角化の問題の「解法」を一つの「手続き」として身につけていることを示唆する．固有値が何物であるかは知らなくても，それが計算できればよい――このような便宜主義的な態度によって身につけた知識は，残念ながら，非常に脆弱である．

固有値の定義を問うたとき，「n 次正方行列 A がスカラー λ および n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすとき，λ を A の固有値という」という答えが返ってくることもよくある．「それでいいんですか？」と聞くと「はい，いいです」と答える．「何か条件が抜けていませんか？」と聞いても，「いえ，これで大丈夫です」と答える．この段階にいたって，質問者は受験生が単なるケアレスミスを犯したのではないと知る．もちろん，この解答は間違いである．$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ という条件が抜けているからである．多くの場合，このようなミスは「ケアレスミス」ではなく，受験生の理解の底の浅さに起因する．固有値や固有ベクトルについてきちんと理解している者ならば，その定義から $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ という条件を抜いてしまうことがどれほど致命的な間違いであるかを知っているはずであろう．

余談であるが，この連載を書くにあたっていくつか目を通した入試問題の問題文の中にも，$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ という条件の欠落した固有値・固有ベクトルの定義が書かれているものがあった．無論，ケアレスミスであろうが，気をつけたいものである．

さらに余談であるが，もとの問題は「$A^2=A$ を満たし，逆行列を持つ n 次正方行列 A の固有値をすべて求めよ」となっていた．この場合は $A^2=A$ の両辺に A^{-1} をかければ $A=E_n$ が得られるので，問題としては非常に簡単である．そこで，ここでは少し改変したものを取り上げた．

問題 1.2 を一般化したものを読者の演習問題としておく．

問題 1.2 の一般化　n 次正方行列 A について，次の問いに答えよ．

(1) $f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i$ ($a_i\in\mathbb{C}$; $i=0,\cdots,m$) は多項式とする．行列 A が $f(A)=O$（O は n 次零行列）を満たすならば，A の固有値は $f(t)=0$ の根で

あることを示せ．

(2)　λ が A の固有値ならば，$\lambda E_n - A$ は逆行列を持たず，$\det(\lambda E_n - A) = 0$ であることを示せ．

解答はつけないが，問題 1.2 の解答がヒントになるであろう．多項式 $f(t)$ に行列 A を代入するとき，定数項 a_0 は 0 次の項 $a_0 t^0$ と考え，そこに A を代入するので，その部分は $a_0 A^0 = a_0 E_n$ となることに注意されたい．

小問 (2) は固有値が特性方程式の根であることの根拠を与えている．

次の問題も固有値と固有ベクトルに関する問題である．

問題 1.3　（北海道大学大学院情報科学研究科生命人間情報科学専攻，平成 21 年度：一部抜粋）　n 行 n 列の正方行列 A が k $(\leq n)$ 個からなる異なる固有値 λ_j $(j = 1, \cdots, k)$ を持つ場合，それら固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ は 1 次独立であることを示せ．

解答例　k に関する帰納法により証明する．$k = 1$ の場合，ただ 1 個の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である．そこで，$k-1$ に対して問題文の結論が成り立つと仮定する．

いま，$c_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, k)$ に対して

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} + c_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

が成り立つと仮定する．式 (1.6) の両辺に行列 A をかけ，$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ であることに注意すれば

$$c_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k-1} \lambda_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} + c_k \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \tag{1.7}$$

が得られる．一方，式 (1.6) の両辺に λ_k をかけると

$$c_1 \lambda_k \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k-1} \lambda_k \boldsymbol{x}_{k-1} + c_k \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

が得られる．式 (1.7) から式 (1.8) を辺々引けば

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\boldsymbol{x}_{k-1} = \mathbf{0} \tag{1.9}$$

となるが，帰納法の仮定より $k-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}$ は 1 次独立であるので

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

が成り立つ．さらに，$j = 1, \cdots, k-1$ に対して $\lambda_j \neq \lambda_k$ であるので

$$c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$$

が得られる．これを式 (1.6) に代入し，$\boldsymbol{x}_k \neq \mathbf{0}$ であることに注意すれば $c_k = 0$ であることも分かる．以上のことより $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ が 1 次独立であることが示された．

解答終わり

ややトリッキーな議論を用いるので，この問題を初めて見たとすれば，その場で考

えて時間内に解答することは難しいかもしれない．しかし，相異なる固有値に対応する固有ベクトルが線形独立（1 次独立）であるという事実は，対角化の問題を論ずるにあたって基本的な命題である．**ある行列の特性方程式が重根を持たなければその行列は対角化可能である**ということが，この命題から導かれるからである．実際，問題 1.1 の解答の中でもこの事実を用いている．

大学院入試に問題 1.3 のような問題が出されるのは，受験生にきちんとした勉強をしてきてほしいと出題者が願うからであろう．きちんとした勉強とは何か？ それは，定義をきちんと知り，命題の証明をきちんと追跡し，具体例をきちんと検証するという地道な作業をきちんと積み重ねていく勉強の仕方のことである．決して，「解法」を丸暗記することではない．

1.4 おわりに

今回は，線形代数の中でも特に出題頻度の高い行列の対角化の問題と，その理論的な土台である固有値と固有ベクトルに関する問題を取り扱った．対角化の問題の解法（手続き）を身につけることはもちろん大事なことであるが，もっと大事なことは，物事の成り立ちの仕組みを根本からしっかりと理解するということである．

次回は，微積分に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

科学と社会 Science & Society

第6回　国家・学問・戦争の諸相

木村駿吉の経験（1）

不敬事件まで

岡本　拓司

前回までは，非西洋文化圏にあった日本に，西洋文化の粋ともいえる科学が受容されていく過程で生じたいくつかの問題を取り上げ，それらを明治期の各年代・各層の人々がどのように解決しようと試みたかを論じた．以後は，個別の人物や話題を取り上げ，社会・国家と科学の具体的な関わりを検討していくこととする．今回からは，明治期を中心に物理学者・技術者として興味深い足跡を残した木村駿吉（1866–1938）の経験に注目し，彼と同時代の科学の姿を描写していきたい．なお，本稿には，拙稿「百年前—木村駿吉とその周辺」，『科哲』第**7**号（2005年），36–47ページの一部を加筆修正して用いた箇所がある．

6.1 木村駿吉とはどのような人物か

木村駿吉は，例えば，1年年長で東京大学予備門から帝国大学までほぼともに学んだといえる長岡半太郎と比べると，知名度は低く，なぜ最初に取り上げられるのかが訝しく思われるかもしれない．ここで，「実は木村駿吉は…」と，その生涯の重要さを印象付ける逸話を紹介することは難しくない．しかし，本稿が駿吉（以下，木村姓の人物が複数名登場するため，本稿では名前で呼ぶ）に注目するのは，単に彼が歴史上・科学史上「重要な」出来事に関わっているからというよりは，よく知られた場面に居合わせつつも，脚光を浴びる地点ではなく，そこからやや外れたところにいたように思われるためである．その場所から眺めると，明治の日本の学問や科学の姿がよりよく見えるような位置に，駿吉はいたように思われるのである．

駿吉が生涯に経験した顕著な出来事を紹介してみよう．

駿吉の人生が最も輝いたのは，日露戦争において，自身の開発した三六式無線電信機が使用され，その成果もあって，日本海海戦（1905年）に連合艦隊が圧勝した直後のことであろう．海軍で無線電信に関わる以前は，駿吉は第二高等学校（二高）の物理の教授であった．それまで技術的な分野に関わったことのない物理学者（というよりは物理学教師であるが）を，兵器の開発に動員した事例としては，世界的に見ても早い時期のものである．

反対に，駿吉が最も深い失意のうちにいたと思われるのは，内村鑑三（1861–1930）のいわゆる「不敬事件」に関わって，当時勤めていた第一高等中学校（一中．1894年より第一高等学校，一高）を，明治24年（1891年）に非職（後述の脚注）になったときであろう．駿吉も内村同様キリスト教徒であり，内村を一中に招いたのは駿吉であった．

上記のような性格の大きく異なる大事件2つに関わったのみでも，「数奇な」と形容するに足る人生であるといい得るであろうが，駿吉の場合はさらに幾つかの特記事項がある．まず，彼は日本で博士号を取ることはなく，物理学者・化学者・数学者として顕著な業績を残した，米国のイェール大学のギブス（Josiah Willard Gibbs, 1839–1903）の指導下でPh.D. を得た（明治29年）．ギブスに日本人の学生がいたこと自体が当時としては珍しく，またギブスの伝記類に記載がないために，この事実はあまり知られていないかもしれない．駿吉はさらに，一中で教師を務めるかたわら，また教師を辞めてからも，日本語の物理学の教科書の翻訳や執筆を精力的に行い，日本における科学史・科学論の嚆矢とも言える著作も発表した．不敬事件は学校に関わる騒動であったが，同種のものとしては，二高時代にも生徒のストライキ事件に際会しており，また予備門時代には生徒としても著名な騒動に加わっている．家族関係を見れば，父親は，軍艦奉行として咸臨丸で米国を訪問した木村芥舟（摂津守喜毅，1830–1901）であり，駿吉は，芥舟の回想録である『三十年史』（交詢社，1892年）の発行を行った．

以上を見れば，駿吉が関わった事件や交流した人物は，いずれもよく知られていることが分かる．さらに，多くの場面で，駿吉は，主役というよりは，準主役の位置にあったことも分かる．無線電信の開発においては主役であったかもしれないが，日本海海戦には連合艦隊に関わる主役級が数多くおり，無線電信自体が脇役である．不敬事件の主役はいうまでもなく内村である．他，ギブスの学生の駿吉であり，またどちらかといえば芥舟の息子の駿吉である（ギブスや芥舟のほうが有名である）．駿吉が大勢を観察するのに適した場所にいたというのは，このような意味においてである．

以下では，このような駿吉の生涯のうちから，明治の学問の姿を伝える出来事を取り出して，おおよそ年代順に検討してみたい．伝記的な細部にはあまり触れる余裕はないが，駿吉を取り上げた文章は幾つかあるので，適宜それらを紹介することとする．

6.2 木村芥舟・勝海舟・福沢諭吉

駿吉は，慶応2年（1866年），芥舟・弥重の子として生れた．駿吉は三男であり，他に，早世した長男，次男で後に海軍に入り駿吉の生涯にも影響を及ぼすことになる浩吉（1861–1940），長女利子，次女清（子）がいた[1]．比較的よく知られている父親芥舟をめぐる逸話を見ると，駿吉が育った環境などを知る手がかりが得られるように思われる．

芥舟は，幕府の海軍創設事業に各所で深く関わっているが，万延元年（1860年）の幕府の遣米使節団のうち，咸臨丸に乗組んだ一行を軍艦奉行として率いて航海を成功させたことは，特に顕著な事績である．この渡米には，艦長格の勝海舟（1823–1899），測量方の小野友五郎（1817–1898），蒸気方の肥田浜五郎（1830–1889），通訳の中浜万次郎（ジョン万次郎，1827–1898）など，幕末から明治の海軍史を彩る人々が関わった．人選も含めた準備を行ったのは芥舟であったが，他にも芥舟関連では，同行を強く望んだ福沢諭吉（1835–1901）を，芥舟が自身の従者として咸臨丸に乗り込ませるよう便宜を図ったことや，勝が自分より若年ながら上役の芥舟とたびたび衝突し，船酔いと称して自室に閉じこもる，日本に帰るのでバッテーラを下ろせと命ずるといった一見幼稚な行動に出たことなどが逸話として伝わる．

芥舟と福沢の親交は維新後も長く続いた．芥舟の幕末期の編年史，『三十年史』には福沢が序文を寄せ，末尾には「木村旧軍艦奉行の従僕福沢諭吉」と記している．福沢に序文を依頼することを思いついたのは駿吉であった．芥舟は，他人の書に序文を書いたことのない福沢の手をわずらわせるのを嫌い，一度はその提案を拒否したが，駿吉がひそかに福沢に接触したところ，福沢は直ちに了承し，一日で序文を書き上げたという[2]．

福沢と芥舟の親交の反面には，幕末の渡米以来と思われる福沢の勝への反感もあった．福沢は，渡

米中から芥舟に対する勝の態度を不快に感じていたようであるが，「瘠我慢の説」（明治24年脱稿，明治34年『時事新報』に掲載）の中では，勝や榎本武揚（1836–1908）がかつて幕臣でありながら維新後は明治政府に仕えていることを非難し，対して，二君にまみえない「瘠我慢」に見られる武士の意地こそ，弱国であっても強国に屈することを容易に肯んじない意志に通ずる，日本の立国の礎たるべき徳義であると論じている．芥舟は，維新後，貧乏や病気に苦しみながらも官途に就くことはなかったが，こうした芥舟や，幕府に殉じた形の死を遂げた小栗上野介忠順（1827–1868）の態度が，福沢の「瘠我慢」の見本であった．

福沢の歯噛みのような思いは，勝や榎本には特に強い印象を与えたわけではないようであり，勝は福沢の指摘を，「行蔵は我に存す，毀誉は他人の主張」と一蹴した．また勝は，幕末には反感を抱いていた芥舟についても，その温厚な人格のために長崎海軍伝習所の運営が潤滑に行われたと評するようになっていた．芥舟も，渡米航海の際の勝の行動はともかく，多難な幕末・維新期に勝が見せた公明正大さを高く評価した[3]．

福沢の感情とは別に，木村家と勝との間には和やかな交流もあったようである．大正の末，浩吉と駿吉が芥舟の肖像画の献納を計画し，かねてからその作品に関心を抱いていた川村清雄（1852–1934）に製作を依頼したところ，川村は，かつて勝の庇護下にあった時期に芥舟と交流があり，芥舟も彼の作品を所有していたことから，これを快く引き受けたという．駿吉は肖像画の催促役を務めたが，このことから川村自身にも関心を持つようになり，大正15年（1926年）には彼の評伝を書いた．そこには駿吉による勝についての評言もあり，「一代の人傑で，死生の巷に往来して狂乱の怒涛を鎮め，今日の新日本に取て大恩人である計りでなく，詩歌文章の道にも秀でゝ，東西古今の美術にも浅からぬ識見を具えてゐた」[4] と記されている．また，駿吉は，明治23年（1890年），キリスト教徒で，勝の晩年の言葉の聞き書きで知られる厳本善治（1863–1942）の妹，かめと結婚している．

有能でありながら旧幕臣として節を通した温厚な父をもち，秀でた人格と知性で国家と並立するかのような存在となっていた福沢や勝と若い時期から交流があったという点は，駿吉の生涯を理解する上で参考になるように思われる．

6.3 東京大学予備門への入学と明治十六年事件

駿吉は，明治14年（1881年）1月，東京大学予備門に入学した．この時期，1学期は9月に始まるので，駿吉は学年途中からの入学である．『東京大学年報』には，第四級（第一学年）に欠員があったので，1月10日・11日に試験を行ったところ，93人が受験し，うち17人が合格したとの記述があるが，駿吉はそのうちの一人であったと思われる[5]．

予備門では，学期ごと，学年ごとの試業によって，厳しく昇級・降級・退学が審査されており，落第を経験せずに卒業に至るのは困難であった[6]が，駿吉は，順当に学年を進んで，明治17年（1884年）7月に卒業した．駿吉が第二級（第二学年）であった明治16年（1883年）6月に出た第三学期の試業の成績[7]で見ると，彼の平均点は76.0点であり，50人中16位と中の上といったところである．同学年で駿吉より上には，天文学者となる平山信（1867–1945）がおり，平均点82.9点で5位，駿吉より下には，74.7点で20位の狩野亨吉（1865–1942），71.1点で31位の沢柳政太郎（1865–1927）などがいる．なお，予備門の年限は，駿吉が入学した後に4年から3年に変更されたが，駿吉は4学年制の第一学年の途中から入校し，3年半後に卒業に至ったことになる．

駿吉が予備門で学んだのは，しかし，正味では3年間であった．明治14年1月から同17年7月までの3年半のうち，明治16年11月から翌年5月までの半年は，以下で述べるとおり，駿吉は，退学処分を受けていた．そして，この処分が許された直後の明治17年7月には卒業し，次いで東京

大学理学部に進学した．

明治16年の退学処分は，同年10月27日に，東京大学法理文三学部の学生と予備門の生徒が起こした，いわゆる「明治十六年事件」に関わってのものである[8)]．これは，東京大学が学位記授与式の時間帯を従来の夕方から日中へと変更したことにより，この日に実施されてきた校庭での運動や立食会といった娯楽が損なわれることを不満に思った学生・生徒のうち百数十名が，当日に式をボイコットして遠足に出掛け，余勢を駆って大学の施設・器物を破壊するなどの暴行をはたらいたという事件である．背景には，寄宿舎の食事への不満，寄宿舎の周囲への木柵の設置に代表される管理強化への抵抗感や，勉学中心となって覇気を失いがちに見える状況に刺激を与えようという意識があったといわれる．

事件翌日の28日には，在舎生一同から謝罪書が提出されたが，学生・生徒の結束は固く，関与した者の名を大学側に明らかにしようとはしなかった．しかし，その後徐々に自首する者が現れるようになり，審理の末，大学は，11月2日に，関与した在舎生145名（のちに1名追加）に退学を命じた．このうち66人が予備門の生徒であった．続いて，退学者には，文部省直轄学校や全国の公私立の学校に入学することも禁ずるとする，極めて厳しい処分が下された．

厳しい処分は，しかし12月には緩み始め，罪の軽い者は徐々に復学が許されていった．暴力行為が著しいとされた67名も，悔悟謹慎の状が顕れたとして，翌年5月には再入学を許された．駿吉も，また駿吉が進学することになる理学部物理学科所属の山口鋭之助（1862–1945）も，この中に含まれていた．退学処分が出されると，教官や学生に同情する者も現れ，勉学が遅れないよう退学者にノートを貸すこともあったという．また，半年の退学の後，2カ月を経ないうちに，駿吉は予備門を，山口は大学を卒業していることから，退学による勉学の後れが問われなかったことも分かる．

事件の際には，予備門長の杉浦重剛（1855–1924）の依頼を受け，学生の信頼の厚い物理学者で理学部教授の山川健次郎（1854–1931）が学生と大学の間を仲介したといわれる．山川は，同助教授の田中舘愛橘（1856–1952）に，停学となっても勉学の便宜を図るので首謀者を出すよう学生に説くことを依頼し，また学生の審問を行う際にもごく簡単に済ませた[9)]．駿吉は，予備門で物理学を教えていた山川を既に知っていたものと思われるが，卒業後に進学した理学部，そして物理学科では，山川に加えて田中舘にも，また17年に官費研究生となり，翌年准助教授となった山口にも出会うこととなった．

処分は形式的には厳しいものであったが，大学にはほとぼりが冷めるまでの措置という意識があったように思われ，また学生側もこれをそれとなく察知していたようである．教官と学生の年齢差も10歳程度であり，両者の間にやや馴れ合った関係が見え隠れするようにも，あるいは，今後日本の将来を担わなければならないものどうしの信頼関係のようなものがあったようにも，感ずることができる．駿吉は，こうした大学の雰囲気を，進学先の物理学科でも出会うことになる人々の顔とともに，記憶していたものと思われる．

6.4 大学在学時代

予備門を出ると，駿吉は東京大学理学部物理学科に進学し，明治21年（1888年）7月に卒業した．在学中，東京大学理学部は帝国大学理科大学となった．1学年上には長岡半太郎がおり，2学年下には卒業式で総代として謝辞を読んだ水野敏之丞（1862–1944）や，文学上の活動でも知られ，のちに東京帝国大学教授となる鶴田賢次（1868–1918）がいる．この時期は各学科とも学年に1人から2人程度が在籍するのみであるが，前後の逸材，特に前の長岡の影で，駿吉の存在はややかすみがちであったようにも思われる．例えば，『理科大学申報』によれば，駿吉は，2年生であった明治19年（1886年）10月には理科大学から学資の貸与を受ける貸費学生となっているが（この頃は齋藤姓である），長岡は同時期に学費免除と費用の給付を受

ける特待学生となった（長岡は前年，東京大学から褒賞給費金を受けている）[10]．また帝国大学卒業後に大学院に進んだ際も，当初，同年で星学科の平山信が給費であったのに対し，駿吉は自費による入学であった．

長岡の残したノート類から，当時の物理学科で学生が学んだ内容が確認できる[11]．力学（流体力学や弾性を含む），光学，熱力学などがあり，電磁気学は最終学年に学んだようである．数学は，微分積分や行列式から始めて，球面調和関数に至るまで物理学で必要なものは学んでおり，特に1年目に学ぶ内容には，菊池大麓（1855–1917）が教えていたものと思われる四元数が含まれている．詳細は後の回に譲るが，数年後に深く関わることになる四元数を，駿吉は物理学科で学び始めた頃に既に知っていたようである．また，当時の四元数の主要な提唱者の1人，ノット（Cargill Gilston Knott, 1856–1922）も講義や実験の指導を行っている．ノットは大学院時代の駿吉を指導することになる．

帝国大学在学中の明治20年（1887年）頃，駿吉は，日本人がキリスト教を信ずるようになれば西洋人から侮蔑されることはないという植村正久（1858–1925）の言葉を信じて洗礼を受け，キリスト教徒となった[12]．教徒としての活動も積極的であり，植村の編集していた『六合雑誌』に物理学の概要や歴史を記した文章[13]を寄稿するなどしている．

6.5 第一高等中学校での活動と不敬事件

大学院に進むと，駿吉は，研究を進める一方で，明治21年8月より第一高等中学校（一中）の嘱托教員として物理学を教えることとなり，次いで明治23年8月に教諭，同年10月に教授となった．

駿吉の物理学教師としての活動には目覚ましいものがあり，明治23年には，文科生向けの科学史や科学論からなる講義をまとめた教科書『科学之原理』（金港堂）や，尋常中学校・尋常師範学校向けの物理学の教科書『新編物理学』上・下（内田老鶴圃）を出版した．この時期の駿吉の教科書は，海外の書籍を参考にして書いたものであるが，以後多くの版を重ねている[14]．

一中の教育全体についても駿吉は教育に意欲的であり，明治22年（1889年）5月には，教頭の木下広次（1851–1910）に対し，木下の信頼にこたえて働くつもりであるとの決意を述べた手紙と共に，改革に向けた諸提言を書き送った．教科については，予科の外国語を一カ国語のみとして習熟度を上げる，天文学は予科に回す，空いた時間に国語・漢文を入れるなどといったものであり，各部ごとの教育の目的と，その目的を達成するための効率を配慮した内容である．また，当時，乱れているとして問題視されていた生徒の生活の指導に関する項目もあり，そこでは，寮を見回りながら生徒の相談にのる必要などが説かれている他，自分の友人で学術徳義に秀でたものを招いて時に談話をなすという提案もなされている．このときすでに，友人であった内村鑑三を念頭においていたかもしれない．

駿吉は，教会での活動を通じて，同じくキリスト教徒であった内村と知り合い，内村が偏狭ながらも愛国心に富み，学問を実践に生かす能力を持っている点に感服し，上述の提案をした頃から，木下に，内村を採用するよう働きかけていた．この努力が実ったのか，内村は明治23年9月に嘱托教員として採用された．内村は，札幌農学校入学以前に，一中の前身校であった東京英語学校に在籍していたこともあったので，母校で教鞭をとるようになったと言えないこともない．

内村の前には，やはりキリスト教徒でイェール大学で博士号を取得した中島力造（1858–1918）が英語・ラテン語の嘱托教員として採用されており，当時一中では3人のキリスト教徒が教鞭をとっていたことになる．このうち内村の講義は，法科の英語の教材に伊藤博文の『大日本帝国憲法義解』の英訳を用い，議論をしながら講義を進めるなど，駿吉の眼から見ても異色なものであった．こうした姿勢は生徒には人気があったものの，校旗の護国旗に象徴される権威主義・国家主義の色調の強い

当時の一中の教員の中には，白眼視する者もあった．駿吉が具体的に名前を挙げているのは，岡田良平（1864–1934），北条時敬（1858–1929），山口鋭之助である[15]．山口とはともに明治十六年事件に関わり，一中では教員の同僚となっていた．

内村の中には，固いキリスト教への信仰心とともに強い愛国心が存在しており，それに魅力を感ずる人々も多かったが，当時の日本においては，この 2 つが 1 人の人間の中で共存し得ることを理解させるのは容易ではなかった．

キリスト教の強い影響下にあると看做されていた文部大臣の森有礼が明治 22 年に死去すると，地方長官会議などを中心に，日本式の倫理の確立を求める声が各所から上がるようになっていた．これに応えて，明治 23 年には「教育ニ関スル勅語」（教育勅語）が渙発された．西洋流の立憲主義をとることを明らかにしていた明治政府にとって，天皇の発言によって道徳の模範を示すという教育勅語の制定は難題であったが，「君主は臣民の心の自由に干渉せず」という立憲主義の原則に反してはおらず，依拠しているのは伝統的な道徳であって特定の宗教ではないと主張し得るような装いを凝らした勅語が，西洋の憲法についての深い知識と法律に関わる技術をもつ井上毅と，同郷の先達であり君徳による道徳の確立を模範とする元田永孚によって草された．またこれに伴い，天皇に対する忠誠は，特定の宗教である神道に基づくのではなく，天皇の徳とともに建国や万世一系の統治を支える，「国体ノ精華」を形成する国民の規範であるとの解釈も誕生した[16]．

駿吉や内村の勤める一中が進む方向は，明治 23 年 11 月 3 日の天長節祝賀式などの機会に，教育勅語の渙発に対応する形で明らかにされていった．祝賀式では，10 月 30 日に発布されたばかりの教育勅語が朗読され，次いで，教頭から校長になっていた木下広次が，勅語の意義を解説した．木下は，教育勅語によって，維新後に見失われた教育の大本が取り戻されたことを喜び，勅語に悖戻する者は「帝国臣民」ではなく，国外に行くか割腹すべきである，学校の門を出入りするものに不忠不義の甚だしい例があれば，「直に校門外に放逐せざるをえ」[17]ないなどと述べた．また，学校は学問の府ではあるが，勅語は学問的議論の対象となる性格のものではなく，そのような態度を勅語に対してとるものとは，木下は面接しないとも語った．同年 12 月 25 日には，一中に天皇親署の教育勅語が下され，生徒と寄宿生は揃ってこれを文部省で拝受した．こうして，内村と駿吉の運命を大きく変えることになる「不敬事件」発生に至る状況が準備されていった．

内村に天皇に対する不敬の行為があったとされるいわゆる「不敬事件」は，明治 24 年 1 月 9 日に倫理講堂で開催された，親署の勅語に対する奉戴式において発生した．この日，倫理講堂の中央には天皇・皇后の肖像が掲げられ，その前の卓の上には親署の勅語が，卓の傍らには一中の校旗である護国旗が置かれた．感冒で欠席した木下に代わって教頭の久原躬弦（1856–1919）が勅語を奉読し，その後，教員と生徒は 5 名ずつ勅語への奉拝を行った．式中に内村が勅語に対してとった態度については幾つかの説があるが，一中生徒が編集していた『校友会雑誌』によれば，内村は「敬礼を尽さず，此神聖なる式場を汚」したという[18]．内村は，自身にしてみれば神のみに向かって捧げるべき敬礼を勅語に対して行うことはできなかった．この行動は決意の上のものであったらしく，類が他に及ぶことを懼れたのか，前日には，内村は所属していた札幌教会に対し退会する旨の手紙を送っている．同じくキリスト教徒であった駿吉や中島は，意図してかあるいは偶然か，病気を理由に式を欠席していたために難を避けることができたが，生徒の信望の厚かった内村はそうした方法を取ることができなかった．

内村の態度に対する非難の声は，勅語奉戴式の当日から一中内外から上がった．式の後一週間ほどは内村自身もこれらに応対したが，やがて感冒に罹り，妻のかずや駿吉などの友人たちが事態の収拾に当たることとなった．学校側からは木下校長が解決策を提案する手紙を送っている（1 月 22 日）[19]．木下は，内村の主義に忠実な点には感服す

るが，皇室に対して最敬礼を行うのは社会の規律・習慣であり，これに従わないのであれば「一身を捨て社会を辞する」覚悟が必要であると諭している．勅語が徳育の根拠であり学校にとっては「本尊」であるとする木下の理解には変化はなく，特に親署親翰といえば「至尊」も同様の「神聖物」であるとも付け加えられている．ただし，この時点ではその後の処分は確定的ではなかったのか，「我々も良教師を得たりと喜び居り候処，御別れ申すべき場合にも立ち至り候ては甚だ残念に御座候」とも述べられている．

内村は，病床にあったことも手伝ってか，木下の手紙のやや同情的に見える文面を自分に引き寄せて解釈し，駿吉を含む友人に相談した上で，社会の儀礼としての敬礼を勅語に対して行うことを決意した．しかし，その後感冒は悪化し，家族の依頼もあって，駿吉が内村の代拝を行うこととなった．駿吉は木下校長と相談の上，1 月 29 日に代拝を行い，翌日には自身が代筆した内村の弁明書を新聞社に送った．この間，駿吉と木下の間では，最終的には内村が辞職しなければ事態の収拾は不可能であるという了解が成立していたようにも思われる．内村の辞表は 1 月 31 日に提出されたが，これも駿吉が代筆したものであった．内村は 2 月 3 日に解嘱されたが，本人が事情を知ったのは，病床から起き上がれるようになってからのことであった．事件の推移に見られる親密な関係からは想像し難いが，内村と駿吉の間には，この事件以降交流はなくなったようである．これは，事態収拾のために駿吉が取った行為も，内村には木下校長に阿ったものに思われたためかもしれない．

駿吉による代拝は，少なくとも一高の生徒の間では一定の支持を得ていた．『校友会雑誌』第 4 号（1891 年 2 月 27 日）には，こうした事態の収拾は，「過激なる学理」と「古来の習慣」の衝突を，理をもって進退させようとしたものであるという評が掲載されている（42 ページ）．しかし，教員の中からは，非難の矛先を，一高との関わりがなくなった内村から駿吉へと転ずるものも現れ[20]，2 月 23 日には，今度は駿吉に対して非職*1) が発令された．この処分を取り仕切ったのは教頭の久原であった．久原がその経緯を木下に説明した手紙によると，駿吉に非職を伝えたのは仏語主任の今村有隣（1841 または 1844–1924）と理学主任の織田顕次郎であったが，駿吉は自分に非があることを認めなかったため，文部大臣（当時は芳川顕正）の同意も得た上で，駿吉に非職の辞令を渡したという．駿吉は「負け惜み強き方」なので，今後世間に向けて抗弁する可能性があるが，これには十分な対応を行うとも述べられている[21]．

木下との間で事態の収拾に関して合意に達していたと考えていた駿吉は，木下に抗議の手紙を送った他，『毎日新聞』で自身の見解を発表した．駿吉も内村も勅語に対する敬意を十分に表明しており，駿吉が非職となる理由はないように思われるが，内村解嘱後も批判の声は止まなかったのである．木下・久原の措置は，正当な理由に基づく処分というよりは，やむを得ず取られた妥協策という性格が強かった．木下が駿吉に書いた返事には，結局のところ問題は勅語と十字架のいずれを本尊と仰ぐかの問題であるという，事件発生以来，天皇への敬意のために信仰がどこまで譲り得るかを真剣に検討してきた駿吉の努力を無にするに等しく，また実質的にはキリスト教信仰を認めないと解し得る主張が展開されている[22]．

既述の通り，一中生徒の一部には，事態が適切に解決されつつあると考えるものもいた．駿吉が非職となったあと，木下は生徒に対する説明会を開催したが，これは，さすがに駿吉に対する措置の事情を生徒に対しても説明する必要が感じられたためであろう．ここで，木下は，内村にも駿吉にも不敬の念があったとは思われないが，皇室に対して敬意を尽くさない人物が学校にいることに対して批判が高まり，「感触が悪くなって居る」ために非職という措置をとらざるを得なかったとして学校側の対応を弁護し，さらに，勅語に対する尊崇の念は，「学理学説」ではなく，国民の感情に基

*1)　官吏としての地位は残しながら職務を免ぜられること．

づいており，木下自身も後者を支持する以上，駿吉の非職はやむを得なかったと論じた[23]．木下の勅語に対する態度は一貫しているが，駿吉の処置についての説明は十分に明快ではない．しかしこの説明の歯切れの悪さの原因の一端は，教育勅語そのものが，実際には宗教色の強い形で天皇への忠誠を強いていながら，その根拠を，特定の宗教ではなく国家を支えてきた規範に求めようとした点にもあった．

不敬事件発生以来，駿吉は粘り強く事態の収拾に努めてきたが，さすがに非職は身にこたえたようである．後年の回想によれば，このときばかりは「四面楚歌の声に包まれて，しほしほと非職の辞令を受けて校門をでた」[24]という．

今回は，明治期の物理学者で，日露戦争の際に海軍で無線電信を開発した木村駿吉の，学生時代から内村鑑三の不敬事件に関わって教職を追われるまでの経験を検討してきた．この後も駿吉は物理学者としての経歴を積み続けるが，不敬事件は駿吉の選択の各所に影響を及ぼしたようにも思われる．次回は，不敬事件前後の駿吉の具体的な研究から議論を始めることとしたい．

なお，本稿の執筆にあたり杉本恭一氏より賜った懇篤なるご教示に感謝する．

参考文献

1) 土居良三『軍艦奉行木村摂津守』(中央公論社，1994年)，225–226 ページ．
2) 福沢諭吉『明治十年丁丑公論・瘠我慢の説』(講談社，1985 年)，98 ページ．
3) 土居良三，前掲[1]『軍艦奉行木村摂津守』，263–266 ページ．
4) 木村駿吉著・印刷・発行『川村清雄　作品と其人物』(稿本) (1926 年)，151 ページ．
5) 『東京大学第一年報』，274 ページ (東京大学史史料研究会『東京大学年報』第二巻 (東京大学出版会，1993年)，87 ページ)．
6) 東京大学百年史編集委員会『東京大学百年史　通史一』(東京大学，1984 年)，592–600 ページ．
7) 東京大学予備門本黌『明治十六年六月東京大学予備門本黌生徒第三学期試業優劣表』(1883 年)．
8) 東京大学百年史編集委員会，前掲[6]，『東京大学百年史　通史　一』，633–643 ページ．
9) 花見朔巳編纂『男爵山川先生伝』(故男爵山川先生記念会，1939 年)，88–89 ページ．
10) 『理科大学申報』起明治十八年九月止仝十九年一二月 (東京大学史史料研究会『東京大学年報』第五巻 (東京大学出版会，1994 年)，141 ページ)．
11) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』(朝日新聞社，1973 年)，78–100 ページ．
12) 小沢三郎『内村鑑三不敬事件』(新教出版社，1961 年)，107 ページ；木村駿吉「懐旧談」，「道」288 号 (1932年 6 月 1 日)，31–40 ページ，34 ページ．
13) 齋藤駿吉「物理学一斑」，「六合雑誌」，**78** 号 (1887年 6 月) 245–252 ページ，および **79** 号 (1887 年 7月) 270–277 ページ．
14) 橋本万平「雑読礼賛――木村駿吉――」，『素人学者の古書探求』(東京堂出版，1992 年)，174–179 ページ；板倉聖宣「木村駿吉とその「模倣と創造」論」，『〔増補版〕模倣と創造――科学・教育における研究の作法――』(仮説社，1987 年)，77–86 ページ．
15) 佐波亘編纂『植村正久と其の時代』第五巻 (教文館，1938 年)，770 ページ．
16) 森川輝紀『増補版　教育勅語への道――教育の政治史』(三元社，2011 年)．
17) 鈴木範久『内村鑑三日録 1888～1891　一高不敬事件 (上)』(教文館，1993 年)，188–189 ページ．
18) 「校友会雑誌」(第一高等中学校友会) 第三号 (明治二四年一月二七日)，42 ページ．
19) 鈴木範久，前掲[17]，『一高不敬事件 (上)』，191–192ページ．
20) 鈴木範久，前掲[17]，『一高不敬事件 (下)』，151–152ページ．
21) 鈴木範久『内村鑑三日録 1888～1891　一高不敬事件 (下)』(教文館，1993 年)，6 ページ．
22) 鈴木範久，前掲[21]，『一高不敬事件 (下)』，7–8 ページ．
23) 鈴木範久，前掲[21]，『一高不敬事件 (下)』，65–71 ページ．
24) 木村駿吉，前掲[12]，「懐旧談」，37 ページ．

(おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科)

Neyman–Scott 問題の解

甘 利 俊 一

前回の一般論を受けて，今回は比例の問題や秤の問題などを具体的に解いてみる．推定関数とその幾何学が，強力な手段を提供することを見てほしい．

16.1 Neyman–Scott 問題の解

セミパラメリックモデルを推定関数で解く一般論を展開した．Neyman–Scott 問題はその一例であり[1]，比較的簡単なので，さらに深い考察ができる．この問題では，局外母数 ξ を含む分布 $q(x,u,\xi)$ が与えられ，ξ は毎回ある未知の分布 $k(\xi)$ から発生すると考えてよい．このとき，確率分布 $p(x,u,k)$ は混合分布

$$p(x,u,k)=\int q(x,u,\xi)k(\xi)d\xi \tag{16.1}$$

の形に書けて，k に関して線形という特徴を持つ．とくに，q が ξ に関して指数型の

$$q(x,u,\xi)=\exp\{\xi s(x,u)+r(x,u)-\psi(u,\xi)\} \tag{16.2}$$

の形をしているモデルが多い．

k に関する線形のモデル (16.1) で，$k(\xi)$ が変化する方向の接ベクトル $\dot{l}_k$ を考える．これは

$$\delta l(x,u,k)=\frac{\int q(x,u,\xi)\delta k(\xi)}{p(x,u,k)}d\xi \tag{16.3}$$

で，これらの全体が張る空間が，(u,k) 点における T_K である．k の変分 $\delta k(\xi)$ のうちで，1 点 ξ_0 でのみ $k(\xi)$ を増やす変化を考えれば，

$$\delta_{\xi_0}l(x,u,k)=\varepsilon\frac{q\left(x,u,\xi_0\right)}{p(x,u,k)} \tag{16.4}$$

である．T_K は上記のベクトルたちで張られる．このベクトルは m 平行移動不変である．つまり，

$$\prod\nolimits_k^{m\,k'} \delta_{\xi_0} l = \varepsilon \frac{q\,(x,u,\xi_0)}{p\,(x,u,k')}, \tag{16.5}$$

したがって，k' 点における $T_K\,(k')$ を k へ m 並行移動しても，これがそのまま k 点での $T_K(k)$ に等しい．すなわち局外接空間 T_K は m 平行移動移動不変で，

$$\prod\nolimits_k^{m\,k'} T_K(k) = T_K\,(k'), \tag{16.6}$$

したがって

$$F_K = T_K \tag{16.7}$$

が成立している．だから (16.1) の形の混合モデル，特に Neyman–Scott 問題では F_K などというややこしいものを考える必要はなく，接空間 T_K で十分である．

このとき，情報接空間 F_I は，単に u 方向の接空間 $T_U = \dot{l}(x,u,k)$ を局外接空間 T_K に対して直交化すれば得られる．これを有効スコア $\dot{l}_E$ というが，情報スコア $\dot{l}_I$ は有効スコア $\dot{l}_E$ に等しい．

情報スコアは有効スコア $\dot{l}_E$ と同じだから，これを求めよう．まず，u スコアを計算する．(16.2) の場合は，$l = \log p$ を u で微分して，

$$\begin{aligned}\dot{l}_u(x,u,k) = \frac{1}{p(x,u,k)} \int &\{\xi s'(x,u) + r'(x,u) - \psi'\} \\ &\times \exp\{\xi s + r - \psi\}\, k(\xi) d\xi \end{aligned} \tag{16.8}$$

という長い式になる．s' などは，s の u による微分である．しかし 2 つの確率変数 s と ξ の式を注意して見ると，s を条件とする ξ の条件付確率分布が

$$p(\xi|s) = \frac{k(\xi)\exp\{\xi s + r - \psi\}}{\int k(\xi)\exp\{\xi s + r - \psi\}\, d\xi} = \frac{k(\xi)\exp\{\xi s + r - \psi\}}{p(x,u,k)} \tag{16.9}$$

と書けることがわかる．これを用いると，

$$\dot{l}_u(x,u,k) = s'(x,u) E\,[\xi|s] + r'(x,u) - E\,[\psi'\,|s] \tag{16.10}$$

となる．ここで $E[\xi|s]$ などは s を固定したときの ξ の条件付期待値である．

同様にして，局外母数 k の変化 δk に対応するスコアを求めれば，

$$\dot{l}_k(x,u,k) = E\left[\frac{\delta k(\xi)}{k(\xi)}\,|s\right] \tag{16.11}$$

である．これは $s(x,u)$ の関数になるから，$T_K(k)$ は k に関わりなく $s(x,u)$ の関数の張る空間

$$T_K = \{h\,[s(x,u)]\}, \quad h \text{ は任意関数} \tag{16.12}$$

であることがわかる．

これに気を良くして，次は情報スコア $\dot{l}_I(x,u,k)$ を求める．これは有効スコア $\dot{l}_E(x,u,k)$ に等しいから，$\dot{l}_u$ を $\{s(x,u)\}$ の空間の直交方向へ射影したものである．一般に確率変数 s と t に対して，条件付期待値 $E[t|s]$ は t を s の張る空間に射影したもの，$t-E[t|s]$ は直交補空間へ射影したものである．これより，求める情報スコアは

$$\dot{l}_I = E\left[\xi|s\right]\left\{s'(x,u) - E\left[s'\,|s\right]\right\} + \left\{r'(x,u) - E\left[r'\,|s\right]\right\} \tag{16.13}$$

である．具体的な問題に対してこれを計算することができる．

いくつかの問題では，たまたま $s'(x,u)$ が $s(x,u)$ の関数になっている．このとき，

$$s' - E\left[s'\,|s\right] = 0 \tag{16.14}$$

だから，

$$\dot{l}_I(x,u,k) = r'(x,u) - E\left[r'|s\right] \tag{16.15}$$

となる．

定理 16.1　s' が s の関数となる場合，(16.15) は最適な推定関数を与える．

多数の試料を用いて 1 台の秤の精度（分散）を求める場合がこれに相当し，最良の推定関数が得られる．また，ニューロン発火のガンマ分布の形を求める問題もこのクラスに属し，最適な推定関数が得られる．ただ，1 個の試料の重さをいろいろな秤で測定する場合はこうはならない．比例の問題も同様である．

16.2 線形関係の推定：その解

いよいよ線形関係の推定問題を解く準備が整った．これは混合型のモデルであり，情報スコアが有効スコアと一致する．確率分布を (16.2) 式の形に書くと，

$$s(x,y,u) = x + uy, \tag{16.16}$$

$$r(x,y,u) = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \tag{16.17}$$

となって，r は u を含まない．したがって情報スコアは，

$$\dot{l}_I = \frac{1}{1+u^2}(y-ux)E\left[\xi|s\right] \tag{16.18}$$

であることがわかる．$E[\xi|s]$ は s の関数であるから，これを

$$h(s) = h(uy+x) \tag{16.19}$$

とおく．すると推定関数は，h を任意の関数として

$$f(x,y,u) = (y-ux)h(uy+x) \tag{16.20}$$

となる．なるほど，最尤推定（全最小二乗）は，h として

$$h(s) = s \tag{16.21}$$

を選んだものになる．推定関数はすべて (16.20) 式の形で書ける．

推定の良さは関数 h として何を選ぶかに依存し，それは ξ の未知の分布 k に依存している．ここでは，次善の策として，h として 1 次関数

$$h(x) = s + c \tag{16.22}$$

を採用しよう．すると推定方程式は，

$$\sum (y_i - ux_i)(uy_i + x_i + c) = 0 \tag{16.23}$$

となる．この解を $\hat{u}_c$ とおこう．定数 c は，有望な値をデータから決めることにする．明らかに $c = 0$ が，最尤法，c を無限に大きくすると，総平均法になるから，この方法は最尤法と総平均法とをつなぐものである．

まず，$\hat{u}_c$ の誤差の二乗平均を計算する．これは k に依存しているが，計算すると，

$$E\left[(\hat{u}_c - u)^2\right] = \frac{(1+u^2)\left\{c + (1+u^2)\,\bar{\xi}\right\}^2 + (1+u^2)^2\left\{\bar{\xi^2} - (\bar{\xi})^2\right\} + (1+u^2)}{c\bar{\xi} + (1+u^2)\,\bar{\xi^2}} \tag{16.24}$$

となる．ただし

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N}\sum \xi_i, \quad \bar{\xi^2} = \frac{1}{N}\sum \xi_i^2 \tag{16.25}$$

であって，局外母数 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ についてはその平均と分散によっている．誤差を最小にするには，c を

$$\hat{c} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi^2} - (\bar{\xi})^2} \tag{16.26}$$

と選べばよい．$\bar{\xi}$ と $\bar{\xi^2}$ は測定データ $x_1, \cdots, x_N$ を使って容易に推定できる．

(16.22) を用いた最良な推定関数は，(16.26) を用いた $\hat{u}_c$ であることが分かった．良く見ると，ξ_i の分散が平均値に比べて大きいとき，すなわち鉱石の大きさが大変ばらついているときには最尤法が良い．しかし，ξ_i の大きさが比較的揃っていれば，総平均法が良いことが分かる．一般にはその中間が良い．このような結果はこれまで知られていなかった．

16.3 秤の問題の解

それでは，ずっと易しそうに見える秤の問題を調べよう．まず，同一の秤で重量が未知の異なる試料を測定し，秤の精度（分数）を推定する問題を扱う．1 個の試料を同じ秤で m 回測定し，得られた重量を $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ とし，

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad \bar{x^2} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \tag{16.27}$$

と置く．すると $\boldsymbol{x}$ の確率分布は

$$p(\boldsymbol{x}, \mu, \sigma^2) = \exp\left\{-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \psi\right\} \tag{16.28}$$

で，これは

$$p(\boldsymbol{x}, u, \xi) = \exp\left\{\xi s(\boldsymbol{x}, u) - \frac{u}{2} r(\boldsymbol{x}, u) - \psi\right\} \tag{16.29}$$

の形に書ける．ここに

$$u = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \xi = \mu, \tag{16.30}$$

$$s(\boldsymbol{x}, u) = u\bar{x}, \quad r(\boldsymbol{x}, u) = -\frac{u}{2}\bar{x^2} \tag{16.31}$$

である．

この場合 $s'(\boldsymbol{x}, u) = s(\boldsymbol{x}, u)/u$ で，これは確率変数として s を用いて書ける．情報スコアは

$$\dot{l}_I(\boldsymbol{x}, u) = r' - E\left[r'|s\right] \tag{16.32}$$

である．すなわち，$\bar{x^2}$ を $\bar{x}$ の直交補空間に射影したものである．これより

$$\dot{l}_I(\boldsymbol{x}, u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{m-1}\left(\bar{x^2} - \frac{1}{m}(\bar{x})^2\right) \tag{16.33}$$

が確かめられる（$\dot{l}_I$ が s と直交することを確かめよ）．

これが推定関数であるから，N 個の試料の測定データ $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ を用いた σ^2 の最良の推定値は，

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum \hat{\sigma}_i^2 \tag{16.34}$$

となる．ただし

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m-1}\left[\left(\bar{x^2}\right)_i - \frac{1}{m}\left(\bar{x}\right)_i^2\right] \tag{16.35}$$

は i 番目の各秤の測定値の不偏分散で，$\hat{\sigma}^2$ はこれを平均したものである．答は当たり前であるが，これが最良であることは，いろいろな方法で確認されていた．

今度は，同一の試料を毎回精度の異なる秤で測定し，この試料の重量を推定する問題である．この場合も同じ秤で m 回測定するとする．

$$u = \mu, \quad \xi_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{16.36}$$

と置いて

$$p(\boldsymbol{x}, u, \xi) = \exp\left\{-\frac{\xi}{2}\sum (x_i - u)^2 - \psi\right\}. \tag{16.37}$$

これより，

$$s = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(x_i - u)^2 = -\frac{1}{2}\left(\bar{x^2} - 2u\bar{x} + u^2\right), \tag{16.38}$$

$$r = 0 \tag{16.39}$$

がわかる．s' を s の直交補空間に射影するのだが，実は s' と s は直交している．それゆえ，情報スコアは

$$\dot{l}_I(\boldsymbol{x}, u) = (\bar{x} - mu)\, h(s) \tag{16.40}$$

の形をしている．したがって，推定量は，$h(s)$ を決めれば

$$\hat{u} = \frac{1}{N}\sum \frac{m\bar{x}_i}{mh\,(s_i)} \tag{16.41}$$

である．最良の $h(s)$ は $k(\xi)$ に依存し，これを得るのは簡単ではないが，推定関数は必ず (16.40) の形のものでなければならないことがわかる．$h(s)$ は，各秤に応じて $\hat{\mu}_i = \sum \bar{x}_i/m$ にどのような重みづけをして平均したらよいかを決める．最適な $k(s)$ は未知分布 $k(\xi)$ から

$$h(s) = E\left[\xi|s\right]. \tag{16.42}$$

$h(s)$ をいいかげんに選んでも，一致推定量が得られる．$k(\xi)$ の形を適当に仮定すればそれなりに良い $h(s)$ が求まる．しかし，この問題の最適解がこのように複雑であるのは驚きである．

16.4 有効スコアと局外母数の直交性

Neyman–Scott 問題は m 平坦なモデルを使うので，情報スコアと有効スコアが一致する．有効スコア $\dot{l}_E$ とはスコア関数 $\dot{l}$ を局外母数に直交するように，この方向へ射影したものである．もし，u と ξ が始めから直交していれば，$\dot{l}_E = \dot{l}$ であるから，話は簡単である．そこで話を通常の局外母数のある確率モデル $p(x, u, \xi)$ に戻し，局外母数 $\boldsymbol{\xi}$（ここでは多次元とする）をうまく選べば，いつでも直交するようにできるか否かを考えておこう．

$\boldsymbol{\xi}$ 方向の誤差の影響を除くために，$\boldsymbol{e}_a$ を $\boldsymbol{\xi}$ 軸に直交するように，$\boldsymbol{e}_\kappa$ の張る空間の直交補空間に射影しよう（図 16.1）．これを $\bar{\boldsymbol{e}}_a$ とおけば

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}_a &= \boldsymbol{e}_a - g_{a\lambda}g^{\lambda\kappa}\boldsymbol{e}_\kappa \\ &= \partial_a l - g_a^\kappa \partial_\kappa l = \bar{\partial}_a l\end{aligned} \tag{16.43}$$

である．$\bar{\boldsymbol{e}}_a$ は，スコアで $\boldsymbol{\xi}$ の変動に影響されない部分を表し，これが実質の情報量

$$\bar{g}_{ab} = \langle \bar{\boldsymbol{e}}_a, \bar{\boldsymbol{e}}_b \rangle = E\left[\bar{\partial}_a l \bar{\partial}_b l\right] \tag{16.44}$$

である．$\bar{\boldsymbol{e}}_a$ を有効スコア，$\bar{g}_{ab}$ を有効 Fisher 情報量と呼ぶ．

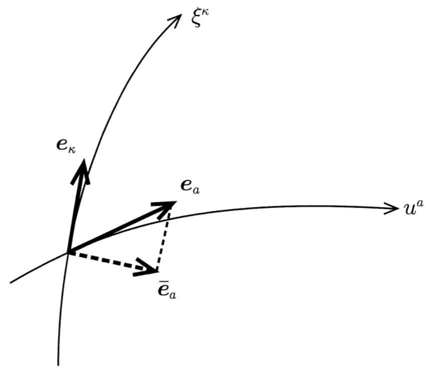


図 16.1　$\boldsymbol{e}_a$ を $\boldsymbol{e}_\kappa$ に直交するように，$\{\boldsymbol{e}_\kappa\}$ の直交補空間に射影する．

2 種類のパラメータ $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{\xi}$ があっても，その基底が直交しているとき，すなわち $g_{a\kappa}=0$ のときには，$\bar{g}_{ab}=g_{ab}$ である．このときは

$$\bar{\partial}_a l = \partial_a l \tag{16.45}$$

であり，有効スコア関数はスコア関数に等しく，局外母数について思い悩む必要がなくなるように見える．

それなら局外母数 $\boldsymbol{\xi}$ をいつも $\boldsymbol{u}$ と直交するように選べば話はうまくいく．これがいつも可能であろうか？ ここが問題である．モデル M において $\boldsymbol{u}$ を固定すると，$\boldsymbol{\xi}$ だけが自由に変わる部分多様体

$$M(\boldsymbol{u}) = \{p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{u} \text{ は固定}\} \tag{16.46}$$

が得られる．$\boldsymbol{\xi}$ は $M(\boldsymbol{u})$ の内部座標系であった．そこで，各 $M(\boldsymbol{u})$ 内で座標変換を施して，新しい座標パラメータ

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}'(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}) \tag{16.47}$$

を用いよう．座標は $M(\boldsymbol{u})$ 毎に選んでもよいから，$\boldsymbol{\xi}'$ は $\boldsymbol{u}$ にも依存して良い．このとき，座標関数 (16.47) をうまく選んで，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{\xi}'$ が直交する，すなわちこの座標系で $\tilde{g}_{a\kappa}=0$ となるようにしたい．これが可能であれば，局外母数が未知であるからといってとりこし苦労はいらない．

$M(\boldsymbol{u})$ が与えられたときに，$M(\boldsymbol{u})$ と直交する接ベクトル $\left\{\bar{\partial}_a\right\}, a=1,\cdots,n$ の組を考えよう．もし，直交化が可能ならば，$\boldsymbol{\xi}'$ が存在して，$\boldsymbol{\xi}'=$ 一定 とする部分空間の接ベクトルが $\left\{\bar{\partial}_a\right\}$ となるようにできる．これは空間の各点に m 次元の方向 $\left\{\bar{\partial}_1,\cdots,\bar{\partial}_n\right\}$ を与えて，これが積分可能かどうか，すなわち，これを接方向とする部分多様体が存在するか否かを問う問題，積分可能条件である（図 16.2）．これはリー括弧積

$$\left[\bar{\partial}_a,\bar{\partial}_b\right] = \bar{\partial}_a\bar{\partial}_b - \bar{\partial}_b\bar{\partial}_a \tag{16.48}$$

がこの部分空間に属するか否かで決まる．これを元のパラメータで計算すると次の定理が得られる[1)]．

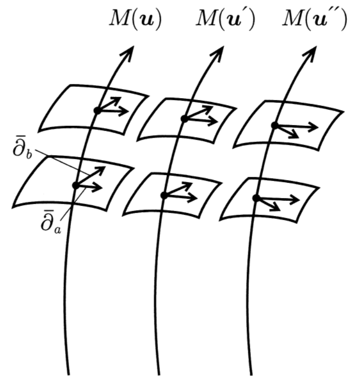


図 16.2　$M(\boldsymbol{u}) = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{u}$ は固定$\}$ が与えられたときに，これに直行する方向 $\left\{\bar{\partial}_a\right\}$ が積分可能であるか？

定理 16.2　局外母数が直交化できる条件は，$g_a^q = g_{ar}g^{rq}$ として，

$$(\partial_b g_a^q - \partial_a g_b^q) + g_a^p \partial_p g_b^q - g_b^q \partial_p g_a^q = 0. \tag{16.49}$$

次の系は興味がある．

系 16.1　u がスカラーパラメータであるときは，積分可能条件がいつでも満たされ，直交パラメータが存在する．

終わりの長い一言

Neyman–Scott 問題は[2)]，簡単でありながら最良の解法が分からない問題として，長年にわたって統計学の理論家を悩ませてきた．私がこの問題に興味をもったのは，1984 年に訪日した Cox 卿が，統計学における未解決の問題に関する講演を行ない，これを聞いてからである．しばらくして，情報幾何による解法に行きついたが，何しろ関数空間を扱う都合上，厳密な議論を展開するには多くの難関が待ち受けている．Bickel ら[5)]も，関数解析の立場からこの問題に取り組んだが，それは極めて複雑なものである．

しかし，東大の定年も迫り，こんな面白い仕組みを自分一人で温めておくわけにもいくまいと，当時大学院学生であった川鍋さんの協力を得て論文としてまとめ，*Bernoulli* 誌に投稿した[3)]．案の定，査読者からは厳密な議論に欠けるとクレームがついた．しかし，編集責任者であった Barndorff-Nielsen 教授の計らいで，これは「実験数学」とでも呼ぶべき面白い試みで，掲載の価値があるとの裁定がもらえた．

その後，何かこれを用いて解ける例題がないかと考えていた．古くは，前回も述べたストーンヘンジ問題というのがある．

この問題は面白いが，“おもちゃ” の問題である．ところが画像処理でこれに似た問題が生じていた．画像処理では，2 台のカメラから撮影した多数の物体から，カメラの位置や物体の立体構造を推定しようとする．このとき，各物体

点の測定には誤差が加わる．物体点がある平面上に乗っているなどの仮定を置けば，まさしくストーンヘンジ問題を一般化した構造が得られる．これは金谷健一博士が提起した問題で[8]，現在は東北大の岡谷貴之博士が優れた理論を展開している[7]．

私にとってまだ話は続く．定年退官後に独立成分解析（ICA, independent component analysis）に力を入れていた．ところがフランスの Cardoso 博士との話の中で，彼がこれはセミパラメトリック問題であるから難しいと言ったのである．まさに青天の霹靂であった．早速，セミパラメトリックの立場からこの問題を攻略して，新しい理論を作った．この論文は，*IEEE Trans. Signal Processing* 誌で論文賞を頂戴した[10]．

さらに話は続く．ニューロンの発火で，一発の発火の後にどれくらいの時間が発火しにくいか，それはニューロンの種類の持つ特性である．ニューロンのスパイクのデータから，この特性を調べようとすると，一定時間観測を続けるうちに，形のパラメータの値は同じであるが，ニューロンの発火率が変わり，等質のデータが得られない．これはまさに発火率を局外母数とするセミパラメトリックモデルである．京大の大学院学生であった，三浦君が興味を示し，情報幾何に基づいてしっかりとした解析を行って，国際学会 NIPS（Neural Information Processing）優秀論文と認定された[9]．

想い出は尽きない．

参考文献

1) S. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics, 28, 1985.
2) J. Neyman and E.L. Scott, Consistent estimates based on partially consistent observation, *Econometrika*, **16**, 1–32, 1948.
3) S. Amari and M. Kawanabe, Information geometry of estimating functions in semiparametric statistical models, *Bernoulli*, **3**, 29–54, 1997.
4) J.M. Begun, W.J. Hall, W.M Huang and J.A. Wellner, Information and asymptotic efficiency in parametric-nonparametric models, *Annals of Statistics*, **11**, 432–452, 1983.
5) P.J. Bickel, C.A.J. Ritov, and J.A. Wellner, *Efficient and Adaptive Estiamtion for Semiparametric Models*, Johns Hopkins University Press, 1994.
6) V.P. Godambe, *Estimating Functions*, Oxford University Press, 1991.
7) T. Okatani and K. Deguchi, Easy calibration of a multi-projector display system, *International Journal of Computer Vision*, 2009.
8) K. Kanatani, Statistical optimization and geometric inference in computer vision, *Philosophical Trans. Royal Society of London, Ser. A*, **356**, 1303–1320, 1998.
9) K. Miura, M. Okada and S. Amari, Estimating spiking irregularities under changing environments, *Neural Computation*, **18**, 2359–2386, 2006.
10) S. Amari and J-F. Cardoso, Blind source separation-semiparametric statistical approach, *IEEE Trans. on Signal Processing*, **45**, 2692–2700, 1997.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

編集後記

時代とともに修得しなければならない数学や物理は変わっていきます．今回の特集で取り上げた「導来圏」も以前は未修得で問題なかったけれども，最近は修得する必要があるものの一つなのではないかと思います．

特集では世界的に活躍中の中堅・若手の方に執筆していただきました．各記事はとても力の入っているものになっており，各分野の研究の活気も伝わるのではないかと思います．

今後の展開も楽しみでなりません．（R）

＊　　　＊

“導来圏”と最初に聞いて浮かんだのは，高橋篤史先生が冒頭で述べていらっしゃるように中華料理店か何かかなということでした．およそ 50 年前に誕生してから，現在ではただの便利な道具というだけの存在ではなくなっているようです．

本特集を機に私も理解を深めようと思いましたが，そのためには圏に関する知識が必要であり，圏を知るには他の知識も必要で…と，やはり勉強とは積み重ねなのだなと実感しました．（T）

数　理　科　学　8月号

2012 年 8 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁